#ASTUCES MATHS

BY : YOUNES EDDAODUI

remercie : Pr. Mezian el fjij

Centre IBN AL HAITAM SALÉ

HAY L'INBIAAT

2 Compléments sur les identités remarquables :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} b^k$$

cas particulier $\longrightarrow$ $(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k}(-b)^k$

" Rq : $n-k+k=n$ "

 # À savoir :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_1^0 = C_1^1 = 1$$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$$

cas particulier $\longrightarrow$ $a^n + b^n = a^n - (-b)^n$

(⚠ n impair) $= (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}(-b)^k$

$a^n + b^n = a^{2k} + b^{2k} = (a^k)^2 + (b^k)^2 = (a^k + b^k)^2 - 2(ab)^k$

(n pair) $\left(n \text{ pair} \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N});\ n = 2k\right)$ $= (a^k - b^k)^2 + 2(ab)^k$

Exemples :

- $\sum_{k=0}^{2023} (-5)^{2023-k}\,4^k = (-5+4)^{2023} = (-1)^{2023} = -1$
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = (-1+1)^n = 0$
- $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$
- $\left(\sum_{k=p}^{n} k^p C_n^k\right)$, on pose $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

" $p = 1$ "

$\longrightarrow f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \longrightarrow f'(1) = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n\,2^{n-1}$

" $\sum_{k=2}^{n} k^2 C_n^k = ? \longrightarrow f'(1) + f''(1)$ / $\sum_{k=3}^{n} k^3 C_n^k = ? \longrightarrow f',\ f''$ et f''' "

Les équations :

$$* \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

$a + b + c = 0$

$S = \left\{1 ; \frac{c}{a}\right\}$

$ac < 0$

l'éq admet deux solutions x_1 et x_2 vérifions :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

$a - b + c = 0$

$S = \left\{-1 ; -\frac{c}{a}\right\}$

Exemples :

(E_1) : $x^2 - \left(\sqrt[2023]{2022} + 1\right)x + \sqrt[2023]{2022} \Longleftrightarrow S_1 = \left\{\sqrt[2022]{2022} ; 1\right\}$

(E_2) : $2022x^2 + x - 2023 = 0 \Longleftrightarrow S_2 = \left\{1 ; \frac{-2023}{2022}\right\}$

. $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$, si $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx < 2$ alors le n° des solutions de l'éq $f(x) = 0$ est :

A	B	C	~~D~~	~~E~~
0	1	2	~~4~~	~~A, réel~~

impossible "trinome" max : 2

Sol : $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 3x^2\,dx + \int_{-1}^{1} 2ax\,dx + \int_{-1}^{1} b\,dx$

$= 2\left[x^3\right]_0^1 + 2b$

$= 2(1 + b) < 2$

$\Longrightarrow b < 0$

$\Longrightarrow 3b < 0$ "a"

C : 2

• $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = ?$

f impair : 0

f pair : $2\int_0^a f(x)\,dx$

• $\int_n^m k\,dx = k(m - n)$

* n° des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'éq $f(x) = \beta$

↓

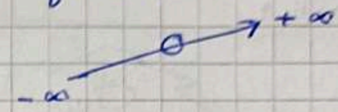
La monotonie de f (signe de $f'(x)$)

+ $\beta \in f(D_f)$?

Exemple : $f(x) = x^{2023} + 2022x + 2023$

→ $f'(x) = 2023x^{2022} + 2022 > 0$ → f est ↗

→ $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty \wedge \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ →



→ La bonne rép est 1.

2- Compléments sur les sommes et les produits :

sigma : Σ → "+"

pigma : Π → "×"

$$\sum_{k=p}^{n} f(k) = f(p) + f(p+1) + \dots + f(n)$$

$$\prod_{k=p}^{n} f(k) = f(p) \times f(p+1) \times \dots \times f(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a = a(n-p+1).$$

$$\prod_{k=p}^{n} a = a^{n-p+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\prod_{k=1}^{n} a^k = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\prod_{k=p}^{n} k = n(n-1)(n-2)\dots p$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

"pour $p = 1$" ; $\prod_{k=1}^{n} k = n!$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2 \text{ (carré parfait)}$$

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{f(n+1)}{f(p)}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)! - 1$$

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \prod_{k=1}^{n} x_k \ , \ x_k \geq$$

$$p + (p+r) + (p+2r) + \dots + d = \underbrace{\left(\frac{d-p}{r} + 1\right)}_{\text{nombres des termes dans le cas général}} \times \frac{d+p}{2}$$

$$\sum_{k=p}^{n} f(k+1) - f(k) = f(n+1) - f(p)$$

$$\sum_{k=p}^{n} f(k+2) - f(k) = \sum_{k=p}^{n} f(k+2) - f(k+1) + \sum_{k=p}^{n} f(k+1) - f(k)$$

$$\sum_{k=p}^{n} q^{k} = q^{p} \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \; ; \quad \sum_{k=1}^{n} x_k \times \sum_{k=1}^{n} y_k \geq n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)$$

Sommes Doubles :

sommes indépendants

$$\bullet \; \underbrace{\sum_{1 \leq i,j \leq n}}_{\text{symbole 1}} (i+j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}}_{\text{symbole 2}} (i+j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \underbrace{i}_{i \text{ cte}} + j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(n i + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$$

$$= n^2(n+1).$$

Sommes indépendants

$$\bullet \; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i \times \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

sommes liées.

$$\bullet \; \underbrace{\sum_{1 \leq j \leq i \leq n}}_{\text{symbole 1}} (i+j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i}}_{\text{symbole 2}} (i+j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} i + j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + \frac{i(i+1)}{2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + \frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{2} i \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(1+2n+1)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)^2}{2}$$

sommes liées

$$\bullet \; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} ij = \sum_{i=1}^{n} \left(i \times \sum_{j=1}^{i} j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i \times \frac{i(i+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Compléments sur les limites :

→ **solution de "$\frac{0}{0}$" :**

"F. I"

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0 \times \infty$

$+\infty - \infty$ 1^{∞}

0^{0} ∞^{0}

Astuce 1 : Règle de l'hôpital

soient f $\wedge$ g 2 f cts dérivables en x_0.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x_0}{\longrightarrow} \frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x_0}{\longrightarrow} \frac{f''(x)}{g''(x)} \underset{x_0}{\longrightarrow} \cdots$$

Astuce 2 : Développement limitée (Equivalence classique au v(0))

1 $\begin{cases} \sin x \underset{0}{\sim} x \\ \tan x \underset{0}{\sim} x \\ \arctan x \underset{0}{\sim} x \\ \cos x \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2} \end{cases}$

2 $\begin{cases} (1+x)^{\alpha} \underset{0}{\sim} 1 + \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \hookrightarrow \text{cp : } \sqrt[n]{1+x} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{x}{n} \\ \frac{1}{1+x} \underset{0}{\sim} 1 - x. \\ \frac{1}{1-x} \underset{0}{\sim} 1 + x \end{cases}$

3 $\begin{cases} \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \\ e^{x} - 1 \underset{0}{\sim} x \end{cases}$

Exemples :

- $$\frac{\ln(\cos 4x)}{\ln(\cos 3x)} \underset{0}{\longrightarrow} \frac{\ln\left(1 - \frac{(4x)^2}{2}\right)}{\ln\left(1 - \frac{(3x)^2}{2}\right)} \underset{0}{\longrightarrow} \frac{-\frac{(4x)^2}{2}}{\frac{(-3x)^2}{2}} \underset{0}{\longrightarrow} \frac{16}{9}$$

- $$e^{-x}\ln(1-e^{x}) \underset{-\infty}{\longrightarrow} e^{-x} \times (-e^{x}) \underset{-\infty}{\longrightarrow} -e^{x-x} \underset{-\infty}{\longrightarrow} -1$$

- $$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \underset{0}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\left(\ln|1-x^2| - \ln|1+x^2|\right)$$
$$\underset{0}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\left(-x^2 - x^2\right)$$
$$\underset{0}{\longrightarrow} -2x \underset{0}{\longrightarrow} 0.$$

- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i;j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} \min(i;j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i;j)\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right)$$

- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i;j) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i;j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

- $\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i;j) + \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i;j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i+j$

Exemples :

(conjugué)

- $\prod_{k=0}^{n}\left(e^{2^k} + e^{-2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n} \frac{e^{2^{k+1}} - e^{-2^{k+1}}}{e^{2^k} - e^{-2^k}} = \frac{e^{2^{n+1}} - e^{-2^{n+1}}}{e - e^{-1}}$

- $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\pi\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{2}{2^k}a\pi\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\pi\right)}$ $\left(\sin 2x = 2\cos x \sin x\right)$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\pi\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\pi\right)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \times \frac{\sin(a\pi)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\pi\right)}.$$

- $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{n+1}$.

→ solution de " $\frac{\infty}{\infty}$ " :

1

$$\frac{A(x)}{B(x)} \xrightarrow[\infty]{\text{"F.I"}} \begin{cases} 0 \ ; & d^\circ A < d^\circ B \\ \infty \ ; & d^\circ A > d^\circ B \\ \ell = \dfrac{\sum \text{coefficient}(\sup d^\circ)}{\sum \text{coefficient}(\sup d^\circ)} \ ; & d^\circ A = d^\circ B \end{cases}$$

Exemple :

$$\frac{\underbrace{\sqrt[2023]{x^{2023}}}_{d^\circ 1} - \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\frac{1}{2} \rightarrow \text{[illegible]}} + \underbrace{\sqrt{9x^2}}_{d^\circ 1} - \underbrace{\sqrt[3]{x-2}}_{\frac{1}{3}\ \text{[illegible]}}}{\underbrace{x}_{d^\circ 1} + \underbrace{\sqrt[2022]{x^{2022}}}_{d^\circ 1} - \underbrace{\sqrt{x}}_{\frac{1}{2}\ \text{[illegible]}} - \underbrace{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}_{\frac{1}{3}\ \text{[illegible]}}} \qquad d^\circ A = d^\circ B$$

$$\xrightarrow[+\infty]{} \frac{1+3}{1+1} \xrightarrow[+\infty]{} \frac{4}{2} \xrightarrow[+\infty]{} 2$$

2 si $u \rightarrow +\infty$ ∧ $v \rightarrow \pm\infty$

- $\dfrac{\ln(u(x))}{v(x)} \longrightarrow 0$ • $\dfrac{\sin(u(x))}{v(x)} \longrightarrow 0$

- $\dfrac{\cos(u(x))}{v(x)} \longrightarrow 0$ • $\dfrac{e^{u(x)}}{v(x)} \longrightarrow \pm\infty$ (signe de $v(x)$)

3 [illegible]

- $u(x) \pm \sin(v(x)) \xrightarrow[\infty]{} u(x)$
- $u(x) \pm \cos(v(x)) \xrightarrow[\infty]{} u(x)$
- $u(x) \pm \ln(v(x)) \xrightarrow[+\infty]{} u(x)$
- $u(x) \pm e^{v(x)} \xrightarrow[\infty]{} e^{v(x)}$

4

$$\begin{cases} \dfrac{\ln(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_p)}{\ln(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_p)} \xrightarrow[\infty]{} \dfrac{n}{m} \\ \sqrt[nm]{x^{m-n}} \ \times \ \dfrac{\sqrt[m]{x+1} - \sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x}} \xrightarrow[\infty]{} \dfrac{n}{m} \end{cases}$$

CENTRE IBN EL HAITAM
Formation et cours de soutiens

Session Formation Juin 2023
Préparation au concours national

Q1 D

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+2x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[6]{1-3x}}=$$

A	B	C	~~D~~	E
0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$

Q2

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}\ ln(1+x)}=$$

A	B	~~C~~	D	E
0	-1	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$

Q3

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=$$

A	B	C	~~D~~	E
1	0	$\sqrt{e}$	e^{-4}	$+\infty$

Q4

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-cos^2(x)}{x^2+sin^2(x)}=$$

A	B	C	D	E
$+\infty$	-1	$\cancel{1}$	π	$-\pi$

Q5

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$$

~~A~~	B	C	D	E
-1	$+\infty$	0	1	$-\infty$

Q6

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-x^2-1}{xtanx}\right)= + \infty$$

A	B	C	~~D~~	~~E~~
1	$-\infty$	-1	$+\infty$	0

Q7

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{sin^2n-cos^2n}{n}=$$

~~A~~	B	C	D	E
0	1	$+\infty$	$-\infty$	Autre réponse

Q8

$$\lim_{x\to-\infty} xln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=$$

A	B	~~C~~	D	E
$+\infty$	$-\infty$	1	0	Autre réponse

Q9

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x=$$

A	B	~~C~~	D	E
e	$+\infty$	1	0	N'existe pas

Q10

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}+n^2\right)^{\frac{1}{n}}$$

A	B	C	D	~~E~~
2	$+\infty$	3	0	1

Q11

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{20}+(x+1)^{20}+(x+2)^{20}+\cdots+(x+100)^{20}}{x^{20}+100^{20}}=$$

A	B	C	~~D~~	E
$+\infty$	100	99	101	1

Q12

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}=$$ $u(x)$

A	B	~~C~~	D	E
0,25	$+\infty$	0	2	Autre réponse

Q13

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}+x\sqrt{2}}=$$

A	~~B~~	C	D	E
1	0	$-\infty$	$+\infty$	Autre réponse

Q14

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}=$$

A	B	C	D	E
$+\infty$	0	1	e	$-\infty$

Q15

$$Si\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\alpha x-\beta\right)=0\ ,\quad alors\ :$$

A	B	~~C~~	D	E
$\alpha=0\ et\ \beta=1$	$\alpha=1\ et\ \beta=0{,}5$	$\alpha=1\ et\ \beta=-0{,}5$	$\alpha=1\ et\ \beta=0$	$\alpha=1\ et\ \beta=-1$

Q16

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n+1]{5}-\sqrt[n+1]{e}\right)=$$

A	B	~~C~~	D	E
$-\infty$	$5-e$	0	$+\infty$	N'existe pas

Q17

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^n+n^2}{n^2e^n+1}=$$

A	~~B~~	C	D	E
-1	0	$+\infty$	$-\infty$	N'existe pas

Q18

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+3}{x+\sqrt{x}}=$$ $+\infty$

~~A~~	B	C	~~D~~	E
$+\infty$	$-\infty$	1	0	N'existe pas

Q19

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-\sin 5x}{\ln(1+x)}=$$

A	B	~~C~~	D	E
1	$+\infty$	-4	0	N'existe pas

Q20

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} =$$

A	B	~~C~~	D	E
$-\infty$	0	1	$+\infty$	N'existe pas

Q21

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(2+3x^6)}{ln(2x^3+x)} =$$

A	~~B~~	C	D	E
$+\infty$	2	1	$-\infty$	0

Q22 *soit f une fonctiopn dérivable en* $a\epsilon\mathbb{R}$ *, donc* $\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a} =$ Règle de l'hopital.

A	B	C	~~D~~	E
$f'(a)$	$f(a)+af'(a)$	$f(a)-f'(a)$	$f(a)-af'(a)$	Autre réponse

Q23

$$\prod_{k=0}^{10} \sqrt[3\times 2^k]{5} =$$

A	B	~~C~~	D	E
$\sqrt[3]{5^{\frac{1023}{512}}}$	$\sqrt[3]{5^{\frac{1023}{2048}}}$	$\sqrt[3]{5^{\frac{2047}{1024}}}$	$\sqrt[3]{5^{\frac{512}{1023}}}$	Autre réponse

Q24

$$\sum_{k=0}^{2023} (-1)^k\, C_{2023}^k =$$

A	~~B~~	C	D	E
2022	0	2023	1	Autre réponse

Q25 *soit f une fonctiopn définie par* $f(x) = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+100x^{99}$ *, alors* $f(-1) =$

A	B	~~C~~	~~D~~	E
51	-51	50	-50	52

Q26

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x^2}-2\sqrt{ln(e+x^2)}}{|x|\,sin(x)} =$$

A	B	C	D	~~E~~
$\frac{1}{4}-\frac{1}{e}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}-\frac{1}{e}$	N'admet pas de limite en 0

1ère série :

Q1 :

$$\frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[6]{1+3x} - \sqrt[6]{1-3x}} \xrightarrow[0]{} \frac{1 + \frac{2}{4}x - \left(1 + \frac{1}{3}x\right)}{1 + x - \left(1 - \frac{3}{6}x\right)}$$

$$\xrightarrow[0]{} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$\xrightarrow[0]{} \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{2}} \xrightarrow[0]{} \frac{\frac{1}{3}}{3} \xrightarrow[0]{} \boxed{\frac{1}{9}}$$

Q2 :

$$\frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{\sqrt{3x}\,\ln(1+x)} \xrightarrow[0]{} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{3}\,\ln(1+x)} \xrightarrow[0]{} \frac{1 + \frac{1}{2}x - 1}{\sqrt{3}\,x}$$

$$\xrightarrow[0]{} \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

Q3 :

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} \xrightarrow[+\infty]{} e^{(x+2)\ln\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)}$$

$$\xrightarrow[+\infty]{} e^{\frac{-4(x+2)}{x+3}}$$

$$\xrightarrow[+\infty]{} \boxed{e^{-4}}$$

À savoir :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\alpha}{cx+d}$$

$$ax^2+bx+c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + f$$

Q4 :

$$\frac{x^2 - \cos^2 x}{x^2 - \sin^2 x} \xrightarrow[+\infty]{} \frac{x^2}{x^2} \xrightarrow[+\infty]{} 1$$

Q5 :

$$\frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \xrightarrow[+\infty]{} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[+\infty]{} \boxed{-1}$$

Q6 :

$$\frac{e^x - x - 1}{x \tan x} \xrightarrow[0^+]{} \frac{x - x^2}{x^2} \xrightarrow[0^+]{} \frac{1-x}{x} \xrightarrow[0^+]{} +\infty$$

Q7 :

$$\frac{\sin^2 n - \cos^2 n}{n} \xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

Q8 :

$$x \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \xrightarrow[-\infty]{} \frac{1}{2}\,x\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$$

$$\xrightarrow[-\infty]{} \frac{x}{x-1} \xrightarrow[-\infty]{} 1$$

Q26

Q27

Q_{12} : $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x+\sqrt{x}}$

$\xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ ← أكبر رتبة و بس

$\xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}$

$\xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{1}{4\sqrt{x}} \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

À savoir

$\overset{+\infty}{u(\infty)} - \overset{+\infty}{v(\infty)}$

$d^\circ u = d^\circ v$

لا نهمل و نفكر في المرافق

Q_{13} : $\dfrac{\overset{+\infty}{\sqrt{x^4+1}} - \overset{+\infty}{x^2}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}+x\sqrt{x}}$ → المرافق $\xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{1}{(+\infty)\times(\sqrt{x^4}+x^2)} \xrightarrow[+\infty]{} \boxed{0}$

لا يهمني أمرها

Q_{14} : $\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} \xrightarrow[+\infty]{} e^{(\ln x)^2 - x\ln(\ln x)}$

مهمل   مهمل

$\xrightarrow[+\infty]{} e^{-x} \longrightarrow \boxed{0}$

Q_{15}

- $\sqrt{x^2 \ldots} - \alpha x - \beta \xrightarrow[+\infty]{} x(1-\alpha) - \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

  $\neq 0$ $= 0$

  ∞ 0

- $\sqrt{x^2 \ldots} - x - \beta \xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{-x+1}{2x} - \beta \xrightarrow[+\infty]{} -\dfrac{1}{2} - \beta = 0$

$\Longrightarrow \boxed{\beta = -0{,}5}$

Q_{17} : $\dfrac{2^n + n^2}{n^2 e^n + 1}$ (إهمال >>) $\xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{2^n}{n^2 e^n + 1} \xrightarrow[+\infty]{} \left(\dfrac{2}{e}\right)^n \times \dfrac{1}{n^2 + \frac{1}{e^n}} \xrightarrow[+\infty]{} \boxed{0}$

و لو تكون فوق
أهمل و نشت

$\left(\dfrac{2^n}{e^n}\right) \longrightarrow 0$

Q_{18} : $\dfrac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3}{x+\sqrt{x}}$ $>>$ $\xrightarrow[0^+]{} \dfrac{3}{0^+} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

$<<$ $<<$ $>>$

À savoir :

$\ln x << \sqrt[n]{x}$

$<< x << x^n$

$<< e^{\sqrt[n]{x}} << e^x$

Q_{20} : $\sqrt[n]{2+(-1)^n} \xrightarrow[+\infty]{} 2^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[+\infty]{} \boxed{1}$

$-1 \leq \quad \leq 1$

[illegible]

Q21 : $\dfrac{\ln(2+3x^{6})}{\ln(2x^{3}+x)} \xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{6}{3} = \boxed{2}$

Q23 : $\prod_{k=0}^{10} \sqrt[3\times 2^k]{3} = \prod_{k=0}^{10} 5^{\frac{1}{2^k \times 3}}$

$= \prod_{k=0}^{10} \left(5^{\frac{1}{2^k}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{5^{\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k}}$

$= \sqrt[3]{5^{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}}}$

$= \sqrt[3]{5^{2-\frac{1}{2^{10}}}}$ $\left(\begin{array}{l} 2^{10} = 1024 \\ 2\times 2^{10} = 2048 \end{array}\right)$

$= \sqrt[3]{5^{\frac{2047}{1024}}}$

Q24 : $\sum_{k=0}^{2023} (-1)^k C_{2023}^k = \sum_{k=0}^{2023} C_{2023}^k (1)^{2023-k} \times (-1)^k$

$= (1-1)^{2023}$

$= 0$

Q25 : $f(x) = \sum_{k=0}^{99} (k+1)x^k$

$= (1+3+5+\dots 99) - (2+4+6+\dots+100)$

$= \left(\frac{99-1}{2}+1\right)\left(\frac{99+1}{2}\right) - \left(\frac{100-2}{2}+1\right)\left(\frac{100+2}{2}\right)$

$= 50\times 50 - 50\times 51$

$= -50.$

Compléments sur les suites numériques :

- $U_{n+1} = aU_n + b$:

si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, $b \neq 0$; $\left(x = ax + b \iff x = \frac{b}{1-a} = l\right)$

$\rightarrow V_n = U_n - l \rightarrow (V_n)$ est géométrique de raison

$q = a \rightarrow U_n = l + V_n = l + V_p\, a^{n-p}$

$-1 < a < 1$: $U_n \xrightarrow[+\infty]{} l$; (U_n) est convergente

$a > 1$: $U_n \xrightarrow[+]{} \pm\infty$; (U_n) est divergente

- $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$:

(E) : $\frac{ax+b}{cx+d} = x \iff cx^2 + (d-a)x - b = 0$.

$\Delta = 0$

$\downarrow$

$x = l$

$\downarrow$

$V_n = \frac{a}{U_n - l}$

$\downarrow$

(V_n) est une S.A

de $r = V_1 - V_0$

$\downarrow$

$U_n = l + \frac{a}{V_n}$

$\downarrow$

$U_n \xrightarrow[+\infty]{} l$

(U_n) est convergente

$\Delta > 0$.

$\downarrow$

$x = l_1$ ou l_2

$\downarrow$

$V_n = \frac{U_n - l_1}{U_n - l_2}$

$\downarrow$

(V_n) est une S.G

de $q = \frac{V_1}{V_0}$

$\downarrow$

$(U_n) = \frac{l_2 V_n - l_1}{V_n - 1}$

$-1 < q < 1$: $U_n \xrightarrow[+\infty]{} l_1$

$q > 1$: $U_n \xrightarrow[+\infty]{} l_2$

- $U_{n+2} = a\, U_{n+1} + b\, U_n$:

$(E) : q^2 - aq - b = 0$

$\Delta > 0$

admet 2 solution q_1 et q_2

$(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)$

$U_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$

$\Delta = 0$

(E) admet une seul sol q_1

$(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)$;

$U_n = (\alpha + \beta n) q^n$

$\Delta < 0$

(E) admet 2 solutions conjugués

$q_1 = x_1 + i y_1$

$q_2 = \overline{q_1}$

$(q_1 = [r;\theta])$

$(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)$

$U_n = r^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))$

- $U_n = \ln(V_n)$:

Si (U_n) est une S.G de raison q, alors (V_n) est arithmetique de raison $r = \ln q$.

- $U_n = e^{V_n}$

Si (U_n) est une S.A de raison r, alors (V_n) est géometrique de raison $q = e^r$.

- $(U_n) : \begin{cases} U_p = k \\ U_{n+1} = (U_n)^q \ (\forall n \geq p) \end{cases}$

$\longrightarrow V_n = \ln(U_n)$ (>0) $\longrightarrow \begin{cases} U_n = e^{V_n} \\ V_{n+1} = q\, V_n \end{cases} \longrightarrow U_n = e^{(\ln k) q^{n-p}}$

$-1 < q < 1 \rightarrow (U_n)$ est convergente et $\lim U_n = 1$

$q > 1$; $0 < k < 1$, $(U_n) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

$k > 1$, $(U_n) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

• $U_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$:

$V_n = \ln(U_n) \longrightarrow U_n = e^{V_n} = e^{\alpha \ln n - n \ln a} = e^{n(\alpha \frac{\ln n}{n} - \ln a)}$

$0 < a < 1$; $U_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

$a > 1$; (U_n) converge vers 0.

• $U_n = \sum_{k=p}^{n} f(k)$:

$f(p) + f(p+2) = 2f(p+1)$ $\downarrow$ $U_n = \frac{n-p+1}{2}\left(f(p) + f(n)\right)$.

$f(p) \cdot f(p+2) = f^2(p+1)$ $\downarrow$ $U_n = f(p) \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$ $\left(q = \frac{f(p+1)}{f(p)}\right)$

$f(k) = g(k+1) - g(k)$ $\downarrow$ $U_n = g(n+1) - g(p)$

$\longrightarrow$ si non on est obligé de faire un encadrement de U_n :

$p \leq k \leq n$

$\Longrightarrow B(n;p) \leq f(k) \leq A(n;p)$

$\Longrightarrow \sum_{k=p}^{n} B(n;p) \leq U_n \leq \sum_{k=p}^{n} A(n;p)$

$\Longrightarrow (n-p+1)B(n;p) \leq U_n \leq (n-p+1)A(n;p)$

a, b et c 3 termes consécutifs d'une suite :

arithmétique : $2b = a + c$

géométrique : $b^2 = ac$

Cas particulier : $U_n = \sum_{k=p}^{n} f(k;n) \xrightarrow[+\infty]{} (n-p+1)\, f(n)$

• Sommes de Reiman :

• $U_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[+\infty]{} \int_a^b f(x).dx$

• $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[+\infty]{} \int_0^1 f(x).dx$

Remarque : $\sum_{k=0}^{n-1} \vee \sum_{k=1}^{n} \vee \sum_{k=2}^{n+1} \ldots$

المهم عدد الحدود

هو n

• Ajouter :

• $U_n = \sum_{p}^{n} ak + b + q^k = \sum_{k=p}^{n} ak + \sum_{k=p}^{n} b + \sum_{k=p}^{n} q^k$

$= a \sum_{k=p}^{n} k + \sum_{k=p}^{n} b + \sum_{k=p}^{n} q^k$

$= a \times \frac{(n+p)(n-p+1)}{2} + b(n-p+1) + q^p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

• $U_n = \prod_{k=0}^{n} V_k$ et $V_n = V_0 q^n$

$= \prod_{k=0}^{n} V_0 \times \prod_{k=0}^{n} q^k$

$= V_0^{n+1} \times q^{\sum_{k=0}^{n} k}$

$= V_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}}$

• Théorème de Cesaro :

Si $\lim_{n \to +\infty} U_n = l \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=p}^{n} U_k}{n} = l$

Les suites implicites :

soit $f_n(x)$ une fonction définie sur $\mathcal{J}$, l'éq $f_n(x) = \beta$ admet une unique solution u_n dépend de n (متتالية كلما تغير n، تتغير قيمة الحل الوحيد وبالتالي تشكل قيم حدود متتالية) .

Cas 1 :

$(\exists!\, u_n \in I)\ ;\ f_n(U_n) = \beta$.

$(I \subset \mathcal{J})$

- monotonie de (U_n) :

signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

$\oplus$:

$f_{n+1}(x) > f_n(x)$

$f_{n+1}(U_{n+1}) > f_n(U_{n+1})$

- $f \nearrow \;\rightarrow\; U_n \searrow$
- $f \searrow \;\rightarrow\; U_n \nearrow$

$\ominus$:

$f_{n+1}(x) < f_n(x)$

$f_{n+1}(U_{n+1}) < f_n(U_{n+1})$

- $f \nearrow \;\rightarrow\; U_n \nearrow$
- $f \searrow \;\rightarrow\; U_n \searrow$

Cas 2 :

$(\exists!\, u_n \in I)\ ;\ f_n(U_n) = g(n)$

$(I \subset \mathcal{J})$

monotonie de (U_n)

signe de $g(n+1) - g(n)$

$g(n+1) > g(n)$

$f(U_{n+1}) > f(U_n)$

- $f \nearrow \;\rightarrow\; (U_n) \nearrow$
- $f \searrow \;\rightarrow\; (U_n) \searrow$

$g(n+1) < g(n)$

$f(U_{n+1}) < f(U_n)$

- $f \nearrow \;\rightarrow\; U_n \searrow$
- $f \searrow \;\rightarrow\; U_n \nearrow$

"Partie entière"

↳ $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists!\, p \in \mathbb{Z})$; $p \leq x < p+1$.

La partie entière " الجزء الصحيح " de x notée $E(x)$ ou $[x]$ est égale à p.

↳ $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x - 1 < E(x) \leq x$

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

↳ $E(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ $\wedge$ $E(x) \xrightarrow[-\infty]{} -\infty$.

↳ $E(x) \xrightarrow[x_0]{}$

- $x_0 \notin \mathbb{Z}$ $\xrightarrow[x_0]{}$ $E(x_0)$.
- $x_0 \in \mathbb{Z}$
  - $x_0^+ \longrightarrow x_0$
  - $x_0^- \longrightarrow x_0 - 1$

↳ $(\forall k \in \mathbb{N})$; $E(k) = k$.

Q26 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^2}-2\sqrt{ln(e+x^2)}}{|x|\,sin(x)}=$$

A	B	C	D	E
$\frac{1}{4}-\frac{1}{e}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}-\frac{1}{e}$	N'admet pas de limite en 0

Q27 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}=$$

A	B	C	D	E
0	1	$+\infty$	2	Autre réponse

Q28 *la limite* $\lim_{x\to 0^+}\frac{lnx}{x+a}-ln\left(\frac{x}{x+a}\right)$ où $a\epsilon\mathbb{R}^{+*}$, *est finie si et seulement si* :

A	B	C	D	E
$a>1$	$0<a<1$	$a=1$	0	2

Q29

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=$$

$\frac{3}{4}$

A	B	C	D	~~E~~
1	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	Autre réponse

Q30 *soit* (u_n) *une suite définie par :* $u_0 = 1{,}2023$ *et* $u_{n+1} = {u_n}^{2023}$ *, la limite de suite* (u_n) *est*

A	B	C	~~D~~	E
0	$-\infty$	1	$+\infty$	N'existe pas

Q31 *soit* (u_n) *une suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4-u_n} \end{cases}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 3}$ *et* $w_n = ln(u_n)$

E

A	B	~~C~~	D	~~E~~
$\forall n\in\mathbb{N}, v_n = \frac{1}{4^{n+1}}$	(w_n) est arithmétique	$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$	$+\infty$	Autre réponse

Q32 *Soit* (u_n) *une suite arithmétique tel que* $u_2 + u_3 + u_4 = 21$ *et* $u_6 = 25$ *, alors* u_0 *est égale à:*

A	B	~~C~~	D	E
6	-52	-11	-36	-6

Q33 *soit* (u_n) *une suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \\ 3u_{n+2} = 5u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ *, alors :*

A	B	C	D	E
$\forall n\in\mathbb{N}, v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$	$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	Autre réponse

Q34

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(7k)=$$

~~A~~	B	C	D	E
3,5	0	2	$+\infty$	n'existe pas

Q35

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}\right)=$$

~~A~~	B	C	D	E
$e-1$	1	$\frac{1}{e-1}$	$e+1$	$\frac{e}{e-1}$

Q36 *Soient* $f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$ *et* u_n *la solution de l'équation* $f_n(x) = 0$ *où* $x\in\mathbb{R}^+$ *et* $n\in\mathbb{N}^*$ *,*
Alors :

A	~~B~~	C	D
(u_n) est croissante	(u_n) est décroissante	(u_n) est périodique	(u_n) est stationnaire

Q37 *la limite de la suite* (u_n) *suite à la question précédente est égale à :*

~~A~~	B	C	D
0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{0{,}5}$

Q_{33} : $(E) : 3q^2 - 5q + 2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = \frac{2}{3} \end{cases}$

$(\exists(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2) ; \quad U_n = \alpha + \beta \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \frac{2}{3}\beta = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 1 - \beta = 4 \end{cases}$$

$$U_n = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Q_{35} : $\frac{1}{n}\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}\right)$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[+\infty]{} \int_0^1 \exp(x)\, dx$$

$$\xrightarrow[+\infty]{} \left[e^x\right]_0^1 \xrightarrow[+\infty]{} \boxed{e - 1}.$$

Q_{33} : $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(7k) \xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} 7k.$

$$\xrightarrow[+\infty]{} 7 \cdot \frac{n(n+1)}{n^3}$$

$$\xrightarrow[+\infty]{} \boxed{0.}$$

Astuces :

$\cdot\ f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

- $d°P < d°Q$ → asymptote horizontale au $v(+\infty)$

- $d°P = d°Q + 1$ → division euclidienne, méthode de horner

- $d°P = d°Q + n$ $(n \geq 2)$ → branche parabolique de direction de l'axe (Oy).

centres / axes de symétrie :

• $D_f = ?$. $D_f =]-\infty; \alpha[\cup]\beta; +\infty[$ ou $D_f =]\alpha; \beta[$.

- axe de symétrie $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

- centre de symétrie $\Omega\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}; y\right)$
  - $y \in D_f$
  - $y \notin D_f$

• Cas particuliers :

$x \mapsto ax^2 + bx + c$ $\quad (a \neq 0)$

$x \mapsto |ax^2 + bx + c|$

$x \mapsto \sqrt[n]{ax^2 + bx + c}$

$x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$

} une axe de symétrie d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$.

* $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ → centre de symétrie $\Omega\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$

$x \mapsto \ln\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)$ → centre de symétrie $\Omega\left(\alpha; \ln\left(\dfrac{a}{c}\right)\right)$

où $\alpha = \dfrac{-\frac{d}{c} - \frac{b}{a}}{2}$.

CENTRE IBN EL HAITAM
Formation et cours de soutiens

Session Formation Juin 2023
Préparation au concours national

D **Q1** *L'ensemblede définition de la fonction* $f(x) = ln\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)$ *est :* D

A	B	C	D	E
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \{-1;1\}$	$]-1;1[$	$]-1;0[\cup]1;+\infty[$	$]-\infty;-1[\cup\{0\}$

D **Q2** *Soit f la fonction définie par* $f : \begin{cases} f(x) = x + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$ D

La valeur de a pour que la fonction f soit continue en 1 est :

A	B	C	D	E
0	$\pi - 1$	1	$1-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

C **Q3** *Soit h la fonction définie par* $h(x) = \frac{x^2+2x-13}{x-2}$ C

L'asymptote à la courbe (C_h) *au voisinage de* $+\infty$ *pour équation :*

A	B	C	D	E
$y = x$	$y = x - 4$	$y = x + 4$	$y = 1$	$y = 0$

B **Q4** *Soit f la fonction définie sur* $\mathbb{R}_*^+$ *par* $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ *, La dérivée de la foction f est :* B

A	B	C	D	E
$(-1+lnx)\left(\frac{1}{x}\right)^x$	$-(1+lnx)\left(\frac{1}{x}\right)^x$	$(1-lnx)\left(\frac{1}{x}\right)^x$	$(1+lnx)\left(\frac{1}{x}\right)^x$	$x\left(\frac{1}{x}\right)^{x-1}$

A **Q5** *La primitive de la fonction* $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ *qui s'annule en 0 est :* A

A	B	C	D	E
$ln(x+1) - \frac{2x}{x+1}$	$\frac{2x}{x+1}$	$ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$	$ln\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{2x}{x+1}$	$2ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

A **Q6** *la fonction* $f : x \mapsto ln(3x^2+4x+1)$ *a pour axe de symétrie la droite d'équation:*

A	B	C	D	E
$x = -\frac{2}{3}$	$x = 1$	$x = \frac{2}{3}$	$x = \frac{1}{3}$	$y = \frac{2}{3}$

B **Q7** *la fonction définie par :* $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ *a pour centre de symétrie le point :*

A	B	C	D	E
$\Omega\left(-\frac{1}{2};0\right)$	$\Omega\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\Omega\left(-\frac{1}{2};1\right)$	$\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\Omega(2;1)$

B **Q8** *le nombre des solutions de l'équation* $lnx - 5x + 20 = 0$ *dans* $\mathbb{R}^{+*}$ *est :* B

A	B	C	D	E
1	2	0	3	Autre réponse

B **Q9** *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \frac{ln(1+x)}{x+e^x}$

La courbe de la fonction f admet au point $O(0,0)$ *une tangente d'équation:*

A	B	C	D	E
$y = x + 1$	$y = x$	$y = 2x$	$y = -2x$	$y = x - 1$

D

Q10 *Soit f la fonction définie par* $f : \begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

A	B	C	D	E
f n'est pas dérivable en 0	f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$	f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$	f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$	f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$

C

Q11 *La valeur de* $\int_{-1}^{0} \frac{1}{2x^2 - 3x + 1} dx$ *est :*

A	B	C	D	E
0	$ln2 - ln3$	$ln3 - ln2$	2	Autre réponse

E

Q12 *La valeur de* $\int_{0}^{\pi} sin(3x)\, cos(2x)\, dx$ *est :*

A	B	C	D	E
π	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$

B

Q13 *La valeur de* $\int_{-2}^{2} (2x^2 - 3|x| + 1) sin(3x)\, dx$ *est :*

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2} sin6$	0	$sin6 - cos6$	$cos6$	$sin6$

E

Q14 *La valeur de* $\int_{0}^{\pi} e^{-x} cos(x)\, dx$ *est :*

A	B	C	D	E
0	$e^{-\pi} - 1$	$e^{-\pi} + 1$	-1	$\frac{e^{-\pi} + 1}{2}$

C

Q15 *soient* $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{cos(x) + sin(x)} dx$ *et* $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(x)}{cos(x) + sin(x)} dx$ *, alors :*

A	B	C	D	E
$I = J = 0$	$I = \frac{\pi}{2}$ et $J = \frac{\pi}{4}$	$I = J = \frac{\pi}{4}$	$I = \frac{\pi}{3}$ et $J = \pi$	Autre réponse

B

Q16 *L'aire de la partie du plan délimitée par la courbe d'équation* $y = cos(ln(x))$ *et les droites d'équations :* $y = 0$ *,* $x = e^{\pi}$ *et* $x = e^{\frac{\pi}{2}}$ *est :*

A	B	C	D	E
e^{π}	$\frac{1}{2}\left(e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}\right)$	$e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}}$	$e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}$	Autre réponse

B

Q17 *Soit f la solution de l'équation différentielle* $y'' - 2y' + 2y = 0$ *, qui admet en* $x = 0$ *une tangente à sa courbe d'équation* $y = -x + 3$ *;* f *est définie par :*

A	B	C	D	E
$f(x) = e^x + 2e^{-x}$	$f(x) = e^x(3cosx - 4sinx)$	$f(x) = (x+3)e^{-x}$	$f(x) = 4e^x - e^{-2x}$	$f(x) = 3e^x cosx$

C

Q18 *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \sqrt{-x^2}$ *,*
Le domaine de définition de la fonction f est :

A	B	C	D	E
$]-\infty, 0[$	$[0, +\infty[$	$\{0\}$	$\mathbb{R}$	vide

Série 2 :

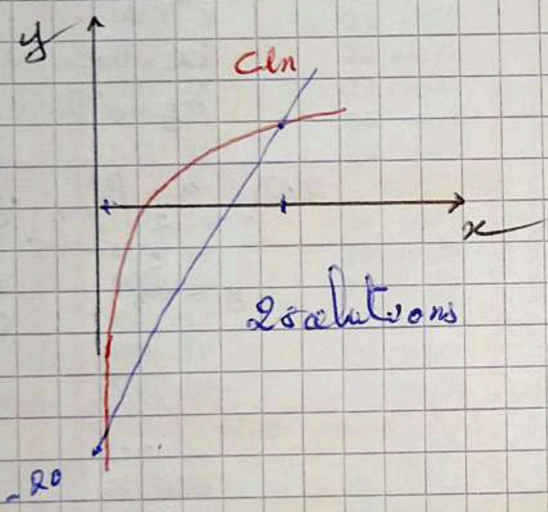
Q7 : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. $D_f =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

$x_\Omega = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$; $y_\Omega = \ln(1) = 0$ $\left(\frac{a}{c}\right)$

$\Omega\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$

Q8 : (E) $\ln x - 5x + 20 = 0$

méthode (1) :



2 solutions

méthode (2) :

$f'(x) = \frac{1-5x}{x}$

x	0	α	$\frac{1}{5}$	β	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow 0$	$19-\ln 5 > 0$	$0 \searrow$	$-\infty$

2 solutions

Q9 : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = f'(0)x$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \xrightarrow[0]{} \frac{\ln(1+x)}{x^2 + xe^x}$$

$$\xrightarrow[0]{} \frac{\frac{1}{1+x}}{2x + (1+x)e^x} \xrightarrow[0]{} \frac{1}{1} = 1 .$$

$y = x$

Q10 : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{\to} \frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} \underset{0}{\to} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

$$\underset{0}{\to} \frac{e^x-1}{2x} \underset{0}{\to} \frac{1}{2}.$$

Q11 : $\int_{-1}^{0} \frac{1}{2x^2-3x+1}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2(x-1)(x-\frac{1}{2})}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{(x-1)(x-\frac{1}{2})}\,dx.$$

※ À savoir :

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \left[\frac{\ln\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)}{\alpha-\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right|\right)}{1-\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \left[\ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right|\right]_{-1}^{0}$$

$$= \ln(2) - \ln\left(\frac{2}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \ln 2 - (2\ln 2 - \ln 3)$$

$$= \ln 3 - \ln 2.$$

Q12 : $I = \int_0^{\pi} \sin(3x)\cos(2x)\,dx.$

Rappel : $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 5x + \sin x\,dx.$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5} - 1 - \frac{1}{5} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} + 2\right) = \frac{12}{2\times 5} = \frac{6}{5}.$$

$\underline{Q_{13}}$: $\displaystyle\int_{-2}^{2} \underbrace{(2x^2 - 3|x| + 1)\sin 3x}_{\text{fonction impair}} = 0$

$\underline{Q_{14}}$: $I = \displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{-x} \cos x \, dx$.

À savoir ⚠ :

- $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right)$
- $\displaystyle\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)$

↳ Preuve : $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\, dx + i\int e^{ax} \sin bx \, dx$

$= \dots = \mathrm{Re} + \mathrm{Im}\, i$

- $\displaystyle\int \cos(\ln x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)\right)$.
- $\displaystyle\int \sin(\ln x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)\right)$.

$$I = \left[\frac{e^{-x}}{2}\left(\cos(x) + \sin x\right)\right]_0^{\pi} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}.$$

طريقة غير بالعقل
للدوال اللي ما يمكن
الخطأ فيها

⚠

$\underline{Q_{\alpha}}$: $\displaystyle\int x^3 \cos(x)$

$$\times \downarrow \begin{array}{cccc} {}^{+}x^3 & -3x^2 & +6x & -6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ s(x) & -\cos(x) & -s(x) & c(x) \end{array}$$

$$\int - = \left[x^3 s + 3x^2 c - 6s - 6c\right].$$

Q_{15} : $\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \, dx$.

Posons : $I = \int_a^b \frac{\cos(ax)}{\cos(ax) + \sin(ax)}$ $\wedge$ $J = \int_a^b \frac{\sin(ax)}{\cos(ax) + \sin(ax)}$,

- $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$.

- $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \, dx$

$= \left[\ln |\cos(x) + \sin x| \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 0$

$$\begin{cases} I - J = 0 \\ I + J = \frac{\pi}{2} \end{cases} \iff I = J = \frac{\pi}{4} .$$

Q_{16} : $S_{Aire} = \int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}} |\cos(\ln x)| \, dx$,

$e^{\frac{\pi}{2}} < x < e^{\pi}$

$\frac{\pi}{2} < \ln x < \pi$

$\cos \ln x < 0$

$= -\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}} \cos(\ln x) \cdot dx$

$= -\left[\frac{1}{2} x (\cos x + \sin x) \right]_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}}$

$= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} e^{\pi}$

$= \frac{1}{2} \left(e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}} \right)$.

À savoir : $\int \cos^n(x) \, dx$ $\wedge$ $\int \sin^n(x) \, dx$

$\hookrightarrow$ n impair : $\int f'(x) \cdot f^{n-1}(x)$

puis on utilise : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\int \cos^n(x)\,dx \quad \wedge \quad \int \sin^n(x)\,dx$$

n : pair

" linéarisation "

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$\hookrightarrow$ généralisation : $\cos^n(x) = \frac{1}{2^n}\left(2\alpha\cos(nx) + 2\beta\cos(n-2)x + \dots + \delta\cos(\dots)\right)$

α, β et δ de T.P ou f. binome

(impair) (pair)

$$\underset{(\text{pair})}{\sin^n(x)} = \frac{1}{(2i)^n}\left(2\alpha\cos 6x - 2\beta\cos 4x + 2\gamma\cos 2x - \delta\cos 0\right)$$

Exemples :

$$\cos^8(x) = \frac{1}{2^8}\left(2C_8^0\cos 8x + 2C_8^1\cos 6x + 2C_8^2\cos 4x + 2C_8^3\cos 2x + C_8^4\right)$$

$$= \frac{1}{2^7}\left(C_8^0\cos 8x + C_8^1\cos 6x + C_8^2\cos 4x + C_8^3\cos 2x + C_8^4\right)$$

$$\sin^8(x) = \frac{1}{(2i)^8}\left(\cos(8x) + \dots\right)$$

C_0^0

$C_1^0 \quad C_1^1$

$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$

$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx \quad \wedge \quad \int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

"On pense à : $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\left(t = \tan\frac{x}{2}\right)$

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I = \int_a^b \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 - t^2}\,dt$$

$$(t = \sin x).$$

$$t = \sin x \Longrightarrow \begin{cases} dt = \cos x\,dx \\ t = \alpha \Longrightarrow x = \sin^{-1}(\alpha) \\ t = b \Longrightarrow x = \sin^{-1}(\beta) \end{cases}$$

$$I = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{1 - \sin^2(x)}\,\cos x\,dx = \int \cos^2 x\,dx$$

Q17 :

$$r^2 - 2r + 2r = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = -4 < 0 \Longrightarrow r_1 = \overline{r_2} = 1 + i$$

$$f(x) = (A\cos(x) + B\sin x)\,e^x.$$

$\cancel{A \wedge C \wedge D}$; De $B \wedge E$ on a $A = 3$.

$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_ \Longrightarrow \beta = -4$$

$$\boxed{C}$$

Compléments sur les nombres complexes.

$i^2 = -1$; $j^3 = 1$ $\left(j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)$

• $i^n = i^{4q+r} \begin{cases} r = 0 \ ; \ i^n = i^0 = 1 \\ r = 1 \ ; \ i^n = i^1 = i \\ r = 2 \ ; \ i^n = i^2 = -1 \\ r = 3 \ ; \ i^n = i^3 = -i \end{cases}$

• n est pair : $(1+i)^n = \left((1+i)^2\right)^{\frac{n}{2}} = (2i)^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}}\, i^{\frac{n}{2}}$

$(1-i)^n = \left((1-i)^2\right)^{\frac{n}{2}} = (-2i)^{\frac{n}{2}} = (-2)^{\frac{n}{2}}\, i^{\frac{n}{2}}$

• n est impair : $(1+i)^n = (1+i)(1+i)^{n-1}$

$(1-i)^n = (1-i)(1-i)^{n-1}$

• $j^n = j^{3q+r} = j^r \begin{cases} r = 0 \ ; \ j^n = j^0 = 1 \\ r = 1 \ ; \ j^n = j = \\ r = 2 \ ; \ j^2 = \bar{j} \end{cases}$

↳ $1 + j + j^2 = 0$

CENTRE IBN EL HAITAM
Formation et cours de soutiens

Session Formation Juillet 2023
Préparation au concours national

Q1 *La forme algébrique du nombre complexe* $(-1+i)^{2022}$ *est :*

A	B	C	D	E
-2^{1011}	$-2^{1011}\,i$	$2^{2022}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	2^{1011}	$2^{1011}\,i$

Q2 *On pose* $S = j^6 + j^7 + j^8 + \cdots + j^{23}$ *avec* $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *, alors :*

A	B	C	D	E
$S = 1$	$S = 1 - j$	$S = 0$	$S = -j$	*Autre réponse*

Q3 *un argument du nombre complexe* $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{2023}$

A	B	C	D	E
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π

Q4 *Soit z un nombre complexe et* $|z| = 1$, *alors le nombre* $\left|\sqrt{2}+z\right|^2 + \left|\sqrt{2}-\overline{z}\right|^2$ *est égale à :*

A	B	C	D	E
$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	6	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Q5 *Le conjugué du nombre complexe* $1 - e^{-i\frac{\pi}{8}}$ *est :*

A	B	C	D	E
$1 + e^{-i\frac{\pi}{8}}$	$1 - e^{i\frac{\pi}{8}}$	$-1 + e^{-i\frac{\pi}{8}}$	$e^{i\frac{\pi}{8}}$	$-1 - e^{i\frac{\pi}{8}}$

Q6 *soit* $z \in \mathbb{C}$, *si* $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ *avec* $\pi < \theta < 2\pi$ *, alors* $|z|$ *est :*

A	B	C	D	E
$2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Q7 *la forme exponentielle du nombre complexe* $1 + e^{i\frac{8\pi}{7}}$ *est :*

A	B	C	D	E
$2\cos\left(\frac{11\pi}{7}\right)e^{i\frac{11\pi}{7}}$	$-e^{i\frac{8\pi}{7}}$	$2\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)e^{i\frac{11\pi}{7}}$	$2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)e^{i\frac{11\pi}{7}}$	$e^{i\frac{8\pi}{7}}$

Q8 *La forme algébrique du nombre complexe* $\frac{2023-2022i}{2022+2023i}$ *est :*

A	B	C	D	E
$1+i$	i	$1-i$	$-i$	1

Q9 *Soient* z_1 *et* z_2 *deux nombres complexes, alors* $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 =$

A	B	C	D	E
$\lvert z_1\rvert^2 + \lvert\overline{z}_2\rvert^2$	$2\lvert z_1\rvert^2 + 2\lvert z_2\rvert^2$	$\lvert z_1\rvert^2 + \lvert z_2\rvert^2$	$\lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$	Autre réponse

Q10 $\arg\left(1 - e^{i\frac{\pi}{5}}\right) =$

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{3\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$

Q11 Soit $\theta \in]0, \pi[$, le module du nombre complexe $\frac{1 - e^{i2\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ est :

A	B	C	D	E
$2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$\cos(\theta)$	1

Q12 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points M d'affixe z tel que $(1 - z)(2 + \bar{z}) \in i\mathbb{R}$ est :

A	B	C	D	E
cercle de rayon $\frac{2}{3}$	L'axe des abscisses	cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}i\right)$	L'axe des ordonnées	cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}\right)$

Q13 soit A un point d'affixe $1 - i\sqrt{3}$, alors l'affixe de l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ est :

A	B	C	D	E
$\sqrt{3} - i$	$\sqrt{3} + 2i$	$-1 - i\sqrt{3}$	2	$-1 + i\sqrt{3}$

Q14 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|\bar{z} - 2| = |iz + 1|$ est la droite d'équation :

A	B	C	D	E
$y = 2x + 1$	$-4x + 2y + 3 = 0$	$y = -2x - 1$	$y = -2x + 3$	$y = 2x - \frac{3}{2}$

Q15 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(\cos(x) + i\sin(x))^5 = 0$

A	B	C	D	E
admet 2 solutions	une seule solution	admet 5 solutions	n'admet aucune solution	Autre réponse

Q16 On pose $S = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2022}$ avec $z = \cos\left(\frac{\pi}{2023}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2023}\right)$, alors :

A	B	C	D	E
$S = 1$	$S = \frac{1}{1 - z^2}$	$S = \frac{1}{1 - z}$	$S = -1$	$S = 0$

Q17 On pose $A = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)$, alors :

A	B	C	D	E
$A = 1$	$A = 0$	$A = -1$	$A = 2$	Autre réponse

Q18 les images des solutions de l'équation $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$ forment :

A	B	C	D	E
un triangle équilatéral	Trois points alignés	un triangle rectangle et isocèle	un triangle isocèle non rectangle	un triangle rectangle non isocèle

Q19 On pose $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, alors la forme exponentielle de z est :

A	B	C	D	E
$2e^{i\frac{\pi}{12}}$	$2e^{-i\frac{\pi}{12}}$	$2e^{i\frac{5\pi}{12}}$	$2e^{-i\frac{5\pi}{12}}$	Autre réponse

Q20 Soit A un point d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et le point A_n d'affixe $(z_A)^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, les point O, A et A_n sont alignes si et seulement si :

A	B	C	D	E
n est pair	n est impair	n est multiple de 3	n est multiple de 4	Autre réponse

Q_1 : $(-1+i)^{2022} = (1-i)^{2022} = \left((1-i)^2\right)^{1011}$

$= (-2i)^{1011} = -2^{1011}\, i^{1011} = 2^{1011} \cdot i$

Q_2 : $S = \sum_{k=6}^{2023} j^k = j^6 \cdot \dfrac{1 - j^{2018}}{1 - j} = 0$.

Q_3 : $\arg\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{2023} = 2023 \times \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) [2\pi]$.

$= -\dfrac{2023}{3}\pi\, [2\pi]$.

$= -\dfrac{\pi}{3}\, [2\pi]$.

⚠ $\dfrac{a}{b}\pi \longrightarrow \begin{array}{c|c} a & b \\ r & q \end{array}$

q pair : $= \dfrac{r}{b}\pi\, [2\pi]$

q impair : $= \dfrac{r-b}{b}\pi$.

Q_4 : Rapp : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{R_e^2 + I_m^2}$

$|z| = z\bar{z}$ $\quad |z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

$|\sqrt{2} + z|^2 + |\sqrt{2} - \bar{z}|^2 = (\sqrt{2}+z)(\sqrt{2}+\bar{z}) + (\sqrt{2}-\bar{z})(\sqrt{2}-z)$

$= \dots$

$= 4 + 2z\bar{z} = 6$.

Q_5 : Rapp : • $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

• $1 - e^{i\theta} = 1 + e^{i(\pi+\theta)} = 2\cos\left(\dfrac{\pi+\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}$

• $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

• $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

• $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.

Q_9 : $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$= \ldots\ldots = 2|z_1|^2+2|z_2|^2$.

$\ulcorner |z|^2 = z\overline{z} \lrcorner$

Q_{10} : $1-e^{i\frac{\pi}{5}} = -2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) e^{i\frac{\pi}{5}}$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{2}\right)}$ $\left(\text{Car } e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i\right)$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) e^{-\frac{2\pi}{5}}$.

Q_{11} : $\dfrac{1-e^{i2\theta}}{1-e^{i\theta}} = \cancel{\dfrac{(1-e^{i\theta})(1+e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}} = 1+e^{i\theta}$.

$= 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.

$0<\theta<\pi \longrightarrow 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2}>0$

Q_{12} : On pose $z=x+yi$;

$(1-z)(2+\overline{z}) = 2+\overline{z}-2z-z\overline{z}$.

$= 2+\overline{z}-z-z-z\overline{z}$

$= 2+2iy-x-yi-x^2-y^2 \in i\mathbb{R}$.

$\Longleftrightarrow 2-x-x^2-y^2=0 \Longleftrightarrow x^2+x+y^2+2=0$

$\Longleftrightarrow \mathcal{C}\left(\Omega\left(-\frac{1}{2};0\right),\ R=\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{3}{2}\right)$.

cercle.

Q_{13} : $R(A)=z \Longleftrightarrow z = ae^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}$

$= 2e^{-i\frac{\pi}{5}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}-1$.

Q_{15} : $(\cos x + i\sin x)^{8} = 0 \Longleftrightarrow e^{i8x} = 0$

" n'admet pas de solution "

0 n'a pas d'argument

Q_{16} : $S = \sum_{k=0}^{1011} z^{2k} = \sum_{k=0}^{1011} \left(e^{i\frac{2\pi}{2023}}\right)^{k}$

$= \dfrac{1 - e^{i\frac{2024}{2023}\pi}}{1 - z^{2}}$

$= \dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{2023}}}{1 - z^{2}} = \dfrac{1}{1 - z}$

Q_{17} : On pose : $Z = \sum_{k=0}^{9} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)$.

$= \sum_{k=0}^{9} e^{\left(i\frac{\pi}{5}\right)k} = \dfrac{1 - e^{\frac{10\pi}{5}i}}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}} = 0$

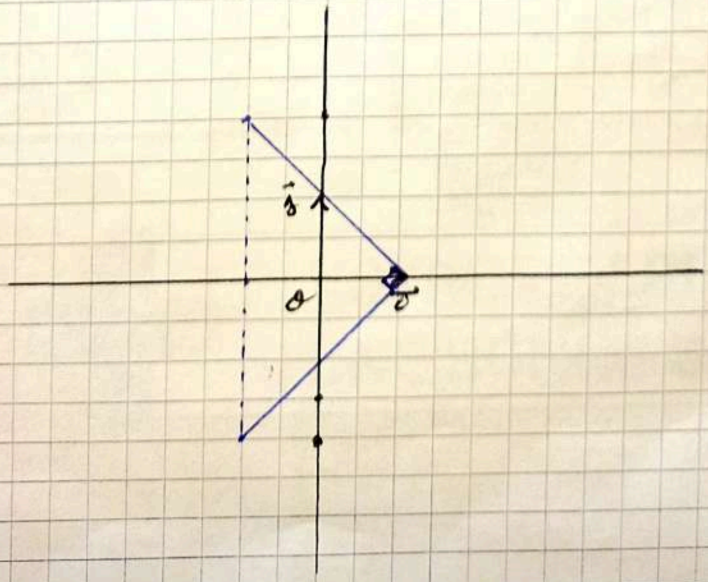
A forme la partie réel donc $A = 0$.

Q_{18} : On pose : $z = x + yi$

(E) : $z^{2} - 2\bar{z} + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x^{2} - y^{2} - 2x + 1) + 2y(x+1)i = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^{2} - y^{2} - 2x + 1 = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$



Q61 :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}$ est égale à :

A $\dfrac{1}{2e}$ B $\dfrac{1}{e}$ C 1 D e E $2e$

Q62 :

Si $f(x)=\dfrac{1}{1-x}ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ alors $f'(x)$ est égale à :

A $\dfrac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x(1-x^2)}$ B $\dfrac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x(1-x^2)}$ C $\dfrac{1}{1-x^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x(1-x^2)}$

D $\dfrac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x(1-x)^2}$ E $\dfrac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{(1-x^2)}$

Q63 :

Le nombre complexe $\left(\dfrac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}$ est égal à :

A i B -1 C $7-15i$ D $-i$ E $7+15i$

Q64 :

Si $x\in\,]0,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-x+x^2-x^3+\dots\dots\dots+(-1)^n x^n\right)$ est égale à :

A $\dfrac{1}{x-1}$ B $\dfrac{1}{1-x}$ C 1 D $\dfrac{-1}{1+x}$ E $\dfrac{1}{1+x}$

Q65 :

Dans $\mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $x^5+x-1=0$ est :

A 0 B 1 C 2 D 3 E 5

Q66 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $|z|\bar{z}=15-20i$ alors $|(1+i)z|$ est égal à :

A $\sqrt{2}$ B $2\sqrt{2}$ C $3\sqrt{2}$ D $4\sqrt{2}$ E $5\sqrt{2}$

Q67 :

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}$ alors :

A $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ B $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$ C $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}$

D $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ E La fonction f n'admet pas de limite en 0

Q68 :

$(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par : $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n^2+u_n$

La limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ si elle existe, est égale à :

A 1 B $+\infty$ C 0 D -1 E Autre valeur

Q69 :

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}dx$ est égale à :

A $\sqrt{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$ B $\ln\sqrt{1+e}$ C $\ln(1+e)$ D $\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$ E $\sqrt{\ln(1+e)}$

Q70 :

Si $f(1)=4$ et $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$; $f'(x)=2x+\ln x$ alors $f(e)$ est égale à :

A e^2 B $e+4$ C e^2+4 D e E 4

Q71 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $z=1+i\left(1+\sqrt{2}\right)$ alors :

A $|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg z=\frac{3\pi}{8}\ [2\pi]$ B $|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg z=\frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

C $|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg z=\frac{3\pi}{8}\ [2\pi]$ D $|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg z=\frac{\pi}{8}\ [2\pi]$ E $|z|=2\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg z=\frac{3\pi}{8}\ [2\pi]$

Q72 :

Si $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx=8$ et $f'(2)-f'(1)=2$ alors $f'(2)+f'(1)$ est égal à :

A 4 B 6 C 8 D 10 E 12

Q73 :

Soit $q\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}q^k$

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty}S_n=4$, alors q est égal à :

$q\frac{1-q^n}{1-q}=4$

$1=4-4q$

$q=\frac{3}{4}$

A $\frac{2}{3}$ B $\frac{3}{4}$ C $\frac{4}{5}$ D $\frac{5}{6}$ E $\frac{6}{7}$

Q74 :

L'intégrale $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ est égale à :

$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$ ⇝ $\frac{\pi}{12}$

A $\frac{\pi}{3}$ B $\frac{\pi}{4}$ C $\frac{\pi}{6}$ D $\frac{\pi}{8}$ E $\frac{\pi}{12}$

Q75 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $|z_1|=|z_2|=1$ et $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$ alors $|z_1-z_2|$ est égal à :

A 1 B 3 C $\sqrt{3}$ D 2 E $\sqrt{2}$

Q76 :

$(u_n)_{n\geq0}$ est la suite définie par : $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sqrt{\frac{u_{n+1}^2+u_{n-1}^2}{2}}$

$\lim_{n\to+\infty}u_n$ est égale à :

A 0 B $+\infty$ C 1 D $\sqrt{2}$ E $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Q77 :

Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & , \quad si \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & , \quad si \quad x > 0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si :

A $a=1$ et $b=1$ B $a=-1$ et $b=1$ C $a=2$ et $b=1$

D $a=-1$ et $b=-1$ E $a=-1$ et $b=0$

Q78 :

Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Si $\int_{-1}^{1} f(x)dx < 2$ alors le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ est :

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

Q79 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Soient z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation d'inconnue z

$$(E) : \quad z^2 - \sin(2\alpha)z + \sin^2(\alpha) = 0$$

La valeur de α pour laquelle les points O, $M(z_1)$ et $M(z_2)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral est :

A $\frac{\pi}{3}$ B $\frac{\pi}{4}$ C $\frac{\pi}{5}$ D $\frac{\pi}{6}$ E $\frac{\pi}{8}$

Q80 :

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on pose : $f_n(x) = e^{-x} - nx$

On a :

A $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists! a_n \in]0;1[) \quad : \quad f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} na_n = 1$

B $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists! a_n \in]0;1[) \quad : \quad f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} na_n = 0$

C $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists! a_n \in]0;1[) \quad : \quad f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} na_n = e$

D $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists! a_n \in]-1;0[) \quad : \quad f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} na_n = 0$

E $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists! a_n \in]-1;0[) \quad : \quad f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} na_n = 1$

Épreuve médecine 2021 :

Q64 : $\dfrac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

$\underset{0}{\to} \dfrac{\sqrt{1+\ln(1+\frac{x}{e})}-1}{\sqrt{1+x}-1}$

$\underset{0}{\to} \dfrac{1+\frac{x}{2e}-1}{1+\frac{x}{2}-1}$

$\underset{0}{\to} \dfrac{1}{e}$.

Q63 : $\left(\dfrac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}$

$= (-i)^{2021} = -i$.

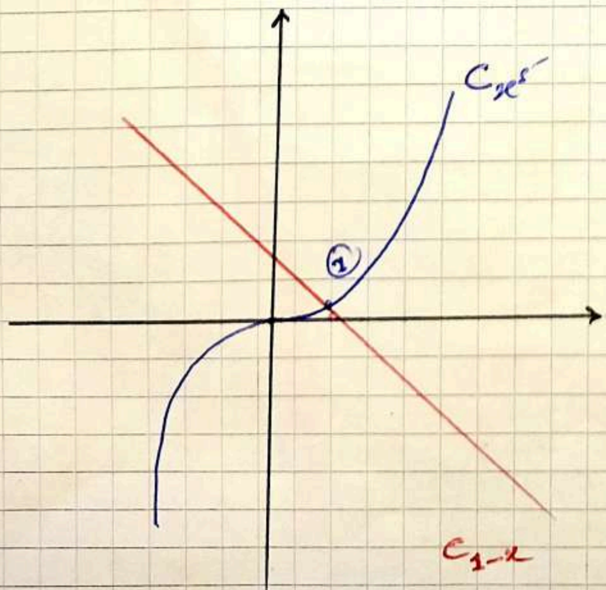
Q65 : On pose : $f(x) = x^5 + x - 1$

$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$

$\to f \nearrow$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	0	$+\infty$

2ème méthode :



Q66 : $|z|\bar{z} = 15 - 20i$

On a $|(1+i)z| = |z|\sqrt{2}$.

$\hookrightarrow |z|x - |z|yi = 15 - 20i$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|x = 15 \\ |z|y = 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2x^2 = 225 \\ |z|^2y^2 = 400 \end{cases}$

$\Leftrightarrow |z|^4 = 625$

$\Leftrightarrow |z|^4 = 5^4$

$\Rightarrow |z| = 5$

D'où : $|(1+i)z| = 5\sqrt{2}$.

Q68 : $\cancel{f(x) = x \Leftrightarrow x = 0}$

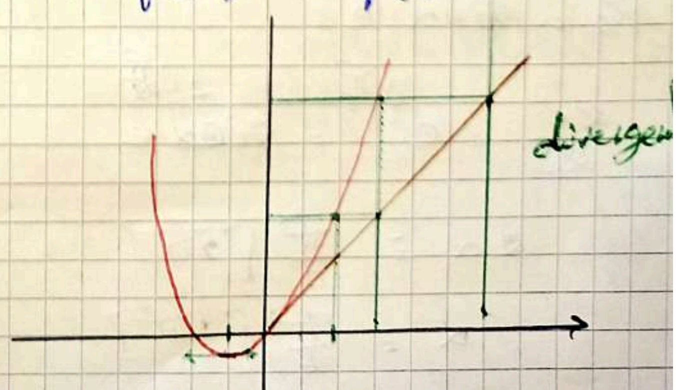
On a $U_{n+1} - U_n = U_n^2 > 0$

$\to U_n \nearrow \to U_n \geq 1$.

(U_n) non majorée donc divergente.

2ème méthode :

$U_{n+1} = f(U_n) \wedge f(x) = x^2 + x$.



Q76 :

$$|z_1| = |z_2| = 1 \wedge |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$$

$$|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{4 - 3} = 1$$

⚠ لا تكتفي بالجواب في الأسئلة فقط بل صحة الطرق أيضا

Q76 :

$$\Longleftrightarrow 2U_n^2 = U_{n+1}^2 + U_{n-1}^2$$

$$2V_n = V_{n+1} + V_{n-1}$$

(V_n) est géométrique

$$\longrightarrow V_n = V_0 + rn \geq 0 \ (= U_n^2 \geq 0)$$

$$= n$$

$$\longrightarrow U_n = \sqrt{n} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$$

Q77 :

- $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{0^-} f = f(0)$

$$\Longleftrightarrow b = 1$$

- $f'_d(0) = f'_g(0) \Longleftrightarrow a = -1$

Q78 : (voir cours)

Q79 :

$$\Delta' = \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = -\sin^4\alpha < 0$$

$$\longrightarrow \frac{-\frac{b}{2} \pm i\sqrt{-\Delta'}}{a}$$

$$z_1 = \sin\alpha\cos\alpha + i\sin^2\alpha$$

$$= \sin\alpha \cdot e^{i\alpha}$$

$$z_2 = \sin\alpha\, e^{-i\alpha}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{2i\alpha}$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

Q80 :

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = \frac{1}{e} - n < 0$$

$$f(-1) = e + n > 0$$

$(\exists!\, a_n \in]0;1[)$; a_n soit ↗ ∨ ↘

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$$

($a_n \in]0;1[$ en tous cas elle est convergente)

$$f_n(a_n) = 0$$

$$\Longleftrightarrow e^{-a_n} = n a_n$$

$$\Longleftrightarrow a_n = \frac{1}{n} e^{-a_n}$$

$$\Longleftrightarrow \ell = 0$$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} n a_n = 1$.

Q61 :

Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{2z-1}{z+1}=z$ est ;

A $\left\{-1;\dfrac{1}{2}\right\}$ B $\left\{1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\right\}$ ■ $\left\{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2};\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ D $\left\{i\sqrt{3};-i\sqrt{3}\right\}$ E Autre réponse

Q62 :

Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+2y'+4y=0$, alors la fonction $g=2f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

■ $y''+2y'+4y=0$ C $y''+4y'+4y=0$ E Autre réponse

B $y''+y'+y=0$ D $2y''+4y'+y=0$

Q63 :

Si $z=e^{-i\theta}-e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]0;\pi\right[$, alors $|z|$ est égal à :

A 2 C $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ E $2\sin\dfrac{\theta}{2}$

B $2\cos\theta$ ■ $2\sin\theta$

Q64 :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^2-n}$ est égale à :

A $-\infty$ B 0 ■ $\dfrac{1}{2}$ D 1 E Autre réponse

Q65 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les deux points $A(1;2;3)$ et $B(2;0;1)$.
L'ensemble des points $M(x;y;z)$ équidistants des points A et B est :

A Le plan : $x+y+z=6$ C Le plan : $2x-4y-4z=9$ E Autre réponse

■ Le plan : $2x-4y-4z=-9$ D La droite : $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-4y-4z=-9 \end{cases}$

Q66 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $arg(iz)\equiv\dfrac{7\pi}{6}\ [2\pi]$ et $|z|=\sqrt{2}$ alors la partie imaginaire de z^3 est égale à :

■ 0 C $\sqrt{2}$ E $-2\sqrt{2}$

B $2\sqrt{2}$ D $-\sqrt{2}$

Q67 :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$. Si $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}dx=\frac{1}{a}$ alors a est égal à :

A $ln(e-1)$ C $ln(2e+1)$ E $2e+1$

B $2e-1$ ■ $ln(2e-1)$

Q68 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

Soit z un nombre complexe et Ω , M et M' les points d'affixes respectivement $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, z et z' tel que : $z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z+i$, alors une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)$ est :

A $\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$

[redacted] $\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

C $-\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$

D $-\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

E $\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$

Q69 :

$ABCD$ est un carré de coté 1

On place les points E et F respectivement sur les cotés $[AB]$ et $[BC]$ tels que $BE = CF = x$

La valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :

A 0 B $\frac{1}{4}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{2}$ [redacted] Autre réponse

Q70 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $|z|-z=3-i\sqrt{3}$, alors $|z|$ est égal à :

A 0 [redacted] 2 C $2\sqrt{3}$ D $3\sqrt{2}$ E $7\sqrt{2}$

Q71 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

Soient A et B les points d'affixes respectives $-i$ et i

L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\left|\frac{iz-1}{\bar{z}+i}\right|=1$ est :

[redacted] La médiatrice du segment $[AB]$

B La droite (AB)

C La droite (AB) privée du point B

D Le cercle de diamètre $[AB]$

E Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Q72 :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Si $\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022$ alors x est égal à :

A $\frac{29}{7} \ln 2022$

B $2022 \ln\left(\frac{7}{29}\right)$

C $2022 \ln\left(\frac{29}{7}\right)$

[redacted] $\frac{7}{29} \ln 2022$

E Autre réponse

Q73 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère le plan (P) d'équation $3x-2z+3=0$

On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6

On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre a $(1 \le a \le 6)$.

La probabilité que le point $A\left(a^2;2a;6a-3\right)$ appartient au plan (P) est :

A $\frac{1}{6}$

[redacted] $\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{2}$

D $\frac{2}{3}$

E Autre réponse

Q74 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^{3x}-6$

La primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3 est définie par :

- [A] $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x}-6x-\frac{2}{3}$
- [B] $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x}-6x+\frac{7}{3}$
- [C] $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x}-6x-\frac{7}{3}$
- [D] $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x}-6x+\frac{2}{3}$
- [E] Autre réponse

Q75 :

L'intégrale $\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}}dx$ est égale à :

- [A] $\frac{1}{3}$
- [B] $\frac{8}{3}$
- [C] $\frac{10}{3}$
- [D] $\frac{14}{3}$
- [E] Autre réponse

Q76 :

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite telle que :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $v_1+v_2+\dots\dots\dots+v_n=2n^2+n$, alors v_8 est égal à :

- [A] 31
- [B] 53
- [C] 54
- [D] 62
- [E] 64

Q77 :

Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$

Si $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(2x-1)=x^2+3x$ alors $f(1)+f'(1)$ est égal à :

- [A] $\frac{5}{2}$
- [B] 4
- [C] $\frac{9}{2}$
- [D] $\frac{13}{2}$
- [E] Autre réponse

Q78 :

Si pour tout entier naturel n, $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$

alors $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $2I_{n+1}+(n+1)I_n$ est égal à :

- [A] e
- [B] e^2
- [C] 1
- [D] $\frac{e-1}{2}$
- [E] $\frac{e+1}{2}$

Q79 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sum_{k=0}^{k=n}x^k=1+x+x^2+\dots\dots+x^n$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

- [A] $y=\frac{n(n+1)}{2}x-\frac{(n-2)(n+1)}{2}$
- [B] $y=\frac{n(n-1)}{2}x-\frac{(n-2)(n+1)}{2}$
- [C] $y=\frac{n(n+1)}{2}x+\frac{(n-2)(n+1)}{2}$
- [D] $y=\frac{n(n-1)}{2}x-\frac{n^2-1}{2}$
- [E] $y=\frac{n(n+1)}{2}x+\frac{n^2-1}{2}$

Q80 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0\in]0,1[$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}=f(u_n)$

Où f est la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$

On a alors :

- [A] $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$
- [B] $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{3}$
- [C] $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$
- [D] $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$
- $\frac{1}{2}$ [E] Autre réponse

Ensemble des pts M	Espace	Plan
$AM = BM$	le plan médiatrice du segment [AB]	la droite médiatrice du segment [AB]
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$	la sphere de diametre [AB]	le cercle de diametre (A B).
$\Omega M = R$	sphere $(\Omega; R)$	cercle $(\Omega; R)$

$$\Delta(E; \vec{u}) = \{ M \in (\mathcal{E}) / \overrightarrow{EM} = t\vec{u} ; (t \in \mathbb{R}) \}$$

(P) : $ax + by + cz + d = 0$

(Q) : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

1. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$; $(P) \equiv (Q)$.

2. $aa' + bb' + cc' = \overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q} = 0$ $(P) \perp (Q)$.

3. $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ v $\frac{a}{c'} \neq \frac{c}{c'}$.

$$(\Delta) : \left(A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} ; \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right).$$

⚠ $(a; b; c) \neq (0;0;0)$

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$

$(a; b) \neq (0;0)$

$\wedge$ $c = 0$

$$\begin{cases} \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} \\ z - z_A = 0 \end{cases}$$

vice versa....

Épreuve 2022 :

Q63 : $z = -(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

$= -2i\sin\theta.$

$|z| = 2\sin\theta.$

Q64 : $n - \sqrt{n^2 - n}$

$\xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{n}{2n} \xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{1}{2}.$

Q67 : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}\,dx$

$= \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^1 \frac{ae^{ax}}{1+e^{ax}}\,dx$

$= \dfrac{1}{a}\left[\ln(1+e^{ax})\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{a}\left(\ln(1+e^{a}) - \ln 2\right).$

$I = \dfrac{1}{a} \iff \ln\left(\dfrac{1+e^a}{2}\right) = 1.$

$\iff \dfrac{1+e^a}{2} = e$

$\iff a = \ln(2e - 1).$

Q68 : $\left(\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)$ $[2\pi]$

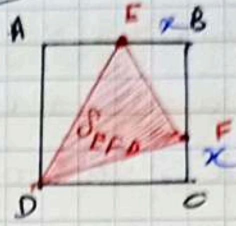
$\dfrac{z' + \frac{\sqrt{3}}{3}}{z + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})z + i + \frac{\sqrt{3}}{3}}{z + \frac{\sqrt{3}}{3}}$

$= \dfrac{\cancel{z + \frac{\sqrt{3}}{3}} + \cancel{iz\sqrt{3} + i}}{\cancel{z + \frac{\sqrt{3}}{3}}}$

$= 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc une mesure de ___ est $\dfrac{\pi}{3}$

Q69 :



1^{er} méthode : $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC.\sin\hat{A}$

$= \dfrac{1}{2} BA.BC \sin\hat{B}$

$= \dfrac{1}{2} CA\,CB \sin\hat{C}.$

⚠ نفس طريقة لغياب قياس الزوايا.

$2^{ème}$ méthode :

$S_{EFD} = S_{ABCD} - S_{EBF} - S_{AED} - S_{FDC}$

$= 1 - \left(\dfrac{1-x}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x(1-x)}{2}\right)$

$= \dfrac{1 - x + x^2}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(x^2 - x + 1) = \dfrac{1}{2}\left(\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{8}.$

valeur de minimum de x

la valeur minimal de f(x)

$\boxed{x = \dfrac{1}{2}}$

Q70 : On pose $z = x + yi$

$|z| - z = 3 - i\sqrt{3}$

$\longrightarrow |z| - x - iy = 3 - i\sqrt{3}$

$\Longrightarrow \begin{cases} |z| - x = 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (x + \ldots \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

$\Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

$|x| = 2$.

Q_{73} : $A \in (P)$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 2(6a-3) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 12a + 9 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$.

$\Leftrightarrow a = 1 \vee a = 3$

$P(A \in (P)) = P(a = 1 \vee a = 3)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Q_{79} : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

- $f(1) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.
- $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$.

$f'(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$y = \frac{n(n+1)}{2} x - \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$

$= \frac{n(n+1)}{2} x - \frac{(n+1)(2-n)}{2}$

$\boxed{A}$

Q_{80} :

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} - x = 0$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 1$

Autre

CENTRE IBN EL HAITAM
Formation et cours de soutiens

Session Formation Juillet 2023
Préparation au concours national

Q1 *On pose :* $X = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ *En calculant* X^3 *, montrer que X vaut :*

A	0	~~B~~	1	C	6	D	7

Q2 *On pose :* $Y = \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}$ *En calculant* Y^4 *, la valeur de* Y *est :*

A	$Y=0$	~~B~~	$Y=1$	C	$Y=2$	D	$Y=3$

Q3 *Le nombre des diviseurs de* $N = 72^{10} \times 162^{50}$ est :

A	17600	B	17680	C	17820	~~D~~	17901

Q4 *Le chiffre des unités de* 23^{2019} est

A	3	B	1	C	9	D	7

Q5 *le nombre* $1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + 4^{2023}$ est :

A	*multiple de 5*	B	*impair*	C	*premier*	D	*non divisible par 5*

Q6

$$\sum_{1\le i\le 10}\ \sum_{1\le j\le 10} (i+j)^2 =$$

A	13750	B	13000	C	10750	D	10000

Q7

$$\sum_{1\le i,j\le n} Min\,(i,j) =$$

A	$\frac{(n+1)(n+2)}{6}$	B	$\frac{n(n+2)}{3}$	C	$\frac{n(n+1)}{3}$	D	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Q8

$$u_n = \prod_{k=0}^{k=n} \frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4} =$$

A	$\frac{6n+3}{n+4}$	B	$\frac{n+4}{3n+6}$	C	$\frac{n+4}{6n+3}$	D	$\frac{3n+6}{n+4}$

Q9

$$u_n = \prod_{k=0}^{k=n} e^{2^k} - e^{-2^k} =$$

A	$\frac{e^{2^{n+1}} - e^{-2^{n+1}}}{e - e^{-1}}$	B	$\frac{e^{2^{n+1}} + e^{-2^{n+1}}}{e - e^{-1}}$	C	$\frac{e^{2^{n+1}} - e^{-2^{n+1}}}{e + e^{-1}}$	D	$\frac{e^{2^{n+1}} + e^{-2^{n+1}}}{e + e^{-1}}$

Q10

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+n} \quad ,on\ \ u_n \in I \text{ avec}$$

[illegible]

A	$I = \left[0, \frac{1}{3}\right[$	B	$I = \left[\frac{1}{3}, 1\right[$	C	$I = [2,3[$	D	$I = [1,2[$

Q11 *On considère toujours la suite la question 10 ci – dessus ,* *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n =$

A	$\sqrt{3}$	B	$ln3$	C	$ln(\sqrt{3})$	D	0

Q12

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} =$$

A		B		C		D	
A	0	B	1	C	2	D	k

Q13 *Soit* (v_n) *une suite réelle. si* $\lim_{n\to+\infty}(v_{n+1}-v_n) = 2$, *alors* $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n} =$

A	0	B	1	C	$+\infty$	D	2

Q14 *Soit* f *une dérivable en* 0 *telle que* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 1$, *alors* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)f(2x)\dots f(nx)}{x^n} =$

A	n	B	$n!$	C	$\frac{1}{n}$	D	1

Q15 *Soit* f *la fonction réelle* $f(x) = e^{-x}\sin(x)$ *et* $f^{(4)}$ *sa dérivée d'ordre4*,

alors $f^{(4)}(x) =$

A	$-f(x)$	B	$-4f(x)$	C	$4f(x)$	D	$-3f(x)$

Q16 *Soit* $f:[0,\alpha] \to \mathbb{R}$ *continue telle que* $f(x) \neq -1$ *et* $f(x).f(\alpha - x) = 1$,

alors $\int_0^\alpha \frac{1}{1+f(x)}dx =$

A	$1+\alpha$	B	$\frac{1}{1+\alpha}$	C	α	D	$\frac{\alpha}{2}$

Q17 *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b]$ *telle que :* $f(a+b-x) = f(x)$

alors $\int_a^b tf(t)\,dt =$

A	$\frac{a}{2}\int_a^b tf(t)\,dt$	B	$\frac{b}{2}\int_a^b tf(t)\,dt$	C	$\frac{a+b}{2}\int_a^b tf(t)\,dt$	D	$\frac{a-b}{2}\int_a^b tf(t)\,dt$

Q18

$$\int_0^\pi \frac{sint}{3+cos^2t}dt =$$

A	$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	B	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	C	$\frac{\pi}{3}$	D	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Q19

$$\int_0^\pi \frac{tsint}{3+cos^2t}dt =$$

A	$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$	B	$\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$	C	$\frac{\pi^3}{6\sqrt{3}}$	D	$\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$

Q20 *Si* $f(x) = \frac{sin(x)sin(2x)sin(3x)\dots sin(nx)}{n}$ *avec* $n\in\mathbb{N}^*$, *alors* $f'(0) =$

A	0	B	1	C	n	D	$\frac{1}{n}$

Q21 *pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *le polynome* $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$, *le polynome* P *est :*

A	*divisible par* $(x-1)^2$	B	*divisible par* $x-2$
C	*non divisible par* $x-1$	D	Autre réponse

Q22 Le nombre cos(5θ) est égal à :

A	$cos^5\theta + 10cos^3\theta sin^2\theta + 5cos\theta sin^4\theta$	B	$cos^5\theta + 5cos^3\theta sin^2\theta + 10cos\theta sin^4\theta$
C	$cos^5\theta - 10cos^3\theta sin^2\theta + cos\theta sin^4\theta$	D	$cos^5\theta - 10cos^3\theta sin^2\theta + 5cos\theta sin^4\theta$

Ajouts d'algèbre :

Série : Q_1 : $X^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = (a-b)^3$

$O_\omega O$ $a^3 - b^3 = 4$; $ab = 1$.

$\rightarrow X^3 = 4 - 3X \Longleftrightarrow X^3 + 3X - 4 = 0$

Par remplaçage des cas possible : $X = 1$.

Q_2 : $\lambda^4 = a^4 + b^4 - 4ab(a^2 + b^2) + 6(ab)^2$.

$O_\omega O$ $a^4 + b^4 = \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} = 7$.

$ab = \sqrt[4]{\frac{49-45}{4}} = 1 . \Rightarrow (ab)^2 = 1$.

$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{a^4 + b^4 + 2(ab)^2} = 3$

$\lambda^4 = 7 - 4 \times 3 + 6 = 1$.

Q_3 : # À savoir : $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ (p_i est premier)

toute entier naturel s'écrit sous forme de produit des nombres premiers (décomposition en f. premiers).

le nombre de diviseurs α sur N est :

$$\alpha = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\dots(\alpha_n + 1).$$

⚠ sur $\mathbb{Z}$; 2α.

Q_4 : le chiffre des unités d'un nombre est le reste de sa division par 10 ; $a \equiv r\,[10]$.

$O_\omega O$ $23^{2019} \equiv r\,[10]$.

Cas particuliers : si un nombre de chiffre d'unité 1 ou 9, exp : $2021^{2023} \equiv 1\,[10]$; $2019^{2022} \equiv [?][10]$

Q_4 : Rapp : • si ch.u de N est donc le c.u de N^n est 1

• si le c.u de N est 9 et n est pair donc le c.u de N^n est 1

• si le c.u de N est 5 donc le c.u de N^n est 5

$23 \equiv 3\ [10]$; $23^3 \equiv 7\ [10]$

$23^2 \equiv 9\ [10]$; $23^4 \equiv 1\ [10]$.

$23^{4k} \equiv 1\ [10]$ $\quad 23^{4k+1} \equiv 3\ [10]$ $\quad 23^{4k+2} \equiv 9\ [10]$ $\quad 23^{4k+3} \equiv 7\ [10]$

4 cas possibles pour tous les entiers naturels k $(\forall k \in \mathbb{N})$,

$2019 \equiv 3\ [4] \iff 2019 = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{23^{2019} \equiv 7\ [10]}$$

Q_5 : ; $4 \equiv -1\ [5]$ $\wedge$ $3 \equiv -2\ [5]$.

$4^{2023} \equiv -1^{2023}\ [5]$ $\wedge$ $3^{2023} \equiv -2^{2023}\ [5]$

$4^{2023} + 1^{2023} \equiv 0\ [5]$ $\wedge$ $3^{2023} + 2^{2023} \equiv 0\ [5]$

$1^{2023} + \underbrace{2^{2023} + 3^{2023}}_{5} + 4^{2023} \equiv 0\ [5]$ — impair — multiple de 5

Rapp : $a \equiv 0\ [b]$

$\iff b / a$

$\iff a$ est multiple de a

Q6 : $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}(i+j)^2 = \sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{10} i^2+2ij+j^2\right)$.

$= \sum_{i=1}^{10}\left(10 i^2 + 2i\times\frac{10\times11}{2} + \frac{10\times11\times21}{6}\right)$.

$= 10\times\frac{10\times11\times21}{6} + 10\times11\times\frac{10\times11}{2} + 10\times\frac{10\times11\times21}{6}$

$= 20\times\frac{10\times11\times21}{6} + 5\times10\times11^2$

$= 50\times2\times7\times11 + 50\times11^2$

$= 50(154+121)$

$= 50\times275 = 2750\times5 = 13750$

Q7 : $\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i;j) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Q8 : ① $\theta\theta$; $U_0 = \frac{6}{4}$, par élimination $U_n = \frac{3n+6}{n+4}$.

② Preuve : $U_n = \prod_{k=0}^{n}\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}$

$= \prod_{k=0}^{n}\frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+4)} = \prod_{k=0}^{n}\frac{k+2}{k+1}\times\prod_{k=0}^{n}\frac{k+3}{k+4}$

$= \frac{n+2}{1}\times\frac{3}{n+4}$

$= \frac{3(n+2)}{n+4} = \frac{3n+6}{n+4}$

Q9 : (Voir ce qui précède) : $\prod_{k=0}^{n} e^{2^k}-e^{-2^k} = \frac{e^{2^{n+1}}-e^{-2^{n+1}}}{e+e^{-1}}$

Q10 : ① $\theta\theta$ par élimination : $U_0 = \frac{1}{3}$; $I = [\frac{1}{3};1[$.

② Preuve : l'encadrement.

Q15 : ※ À savoir : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(n-k)} g^{(k)}$.

$f(x) = e^{-x}\sin x$; $f^{(4)}(x) = \sum_{k=0}^{4} (e^{-x})^{(4-k)} (\sin x)^{(k)}$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$(e^{-x})' = -e^{-x}$; $(\sin(x))^{(4)} = \sin x$.

$(e^{-x})'' = e^{-x}$; $(\sin x)^{(3)} = -\cos x$

$(e^{-x})^{(3)} = -e^{-x}$; $(\sin x)^{(2)} = -\sin x$

$(e^{-x})^{(4)} = e^{-x}$; $(\sin x)' = \cos x$

$$f^{(4)}(x) = (e^{-x})^{(4)}(\sin x)^{(0)} + 4(e^{-x})^{(3)}(\sin x)' + 6(e^{-x})''\sin x'' + 4(e^{-x})'(\sin x)^{(3)} + (e^{-x})^{(0)}\sin^{(4)}(x).$$

$= \dots$

$= -4e^{-x}\sin x = -4f(x)$.

Q16 : $I = \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+f(x)}\,dx$; on pose : $\begin{cases} x = \alpha - t \\ dx = -dt \\ x = 0 \Rightarrow t = \alpha \\ x = \alpha \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$= \int_{\alpha}^{0} -\frac{1}{1+f(\alpha-t)}\,dt$

$= \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\frac{1}{f(t)}}\,dt = \int_0^{\alpha} 1 - \frac{1}{1+f(t)}\,dt = \alpha - I$

d'où : $2I = \alpha \iff \alpha = \frac{I}{2}$

Q17 : $I = \int_a^b t\,f(t)\,dt$; on pose : $\begin{cases} x = a+b-t \\ dx = -dt \\ \cancel{x}\,t = b \Rightarrow x = a \\ t = a \Rightarrow x = b \end{cases}$

$= \int_a^b (a+b-x)f(x)\,dx$

$= \int_a^b (a+b)f(x)\,dx - \int_a^b x\,f(x)\,dx$. d'où : $2I = \int_a^b \frac{a+b}{2} f(x)\,dx$

Q_{18} :
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\frac{1}{3}\cos^2 t}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}(-\sqrt{3})\int_0^{\pi} \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right)^2}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\pi} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right)'}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right)^2}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right)\right]_0^{\pi}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2- méthode 2 : changement de variable

par $x = \cos t$.

Q_{19} :
$$\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi} t\,\frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt$$
$$= \frac{\pi+0}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt$$
$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}.$$

Q_{20} :
$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\prod_{k=1}^{n}\sin(kx)}{nx}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{\prod_{k=2}^{n}\sin kx}{n}$$
$$= 0$$

Q21 : ⌜※ À savoir : si $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \dots = P^{(n)}(\alpha) = 0$
donc le polynome P est divisible par $(x-\alpha)^{n+1}$ ⌟

$P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$; $P'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$

$P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$

Donc $P(X)$ est divisible par $(x-1)^2$

Q22 : ⌜À savoir : $\cos(nx) = Re(e^{inx})$
$\sin(nx) = Im(e^{inx})$. ⌟

1 4 6 4 1

$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$.

$= \cos^5\theta + 5\cos^4(x)\sin\theta\, i - 10\cos^3(x)\sin^2\theta + 10\cos^2 x\sin^3 x\, i$
$+ 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5(\theta)$

D'où : $\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$.

Q23 : $\sin^6(x) = \frac{1}{(2i)^6}\left(2\cos(6x) - 12\cos 4x + 30\cos 2x - 20\right)$

$\int_0^\pi \sin^6(x)dx = -\frac{1}{64}\left[\frac{1}{3}\sin 6x - 3\sin 4x + 15\sin 2x - 20x\right]_0^\pi$

$= \frac{1}{64}\left[20x\right]_0^\pi = \frac{5\pi}{16}$.

Q24 : $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BM}\right) = 0$

$\exists!\, G \in (P)$; $G = \text{bary}\{(A;1);(B;-4)\}$

$\rightarrow$ (P.F) ; $(\forall M \in (P))$; $-3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}$

$3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BM}$

(※) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MG} = 0$; (E_M) est un cercle.

Rappel : $G = \text{bary}\{(A_1;\alpha_1)(A_2;\alpha_2)\dots(A_n;\alpha_n)\}$

Relation vectoriel : $\alpha\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$

P.F : $(\forall M \in (P))$; $\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\overrightarrow{MG} = \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$

Q_{25} : Card $\Omega = 6^3 = 216$; $\Omega = \{(1;1;1), \dots, (6;6;6)\}$

$(a; b; c)$

$Q(x) = ax^2 + bx + c$ ↳ $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \underset{\in \mathbb{N}}{4ac}$

$b = 2 \Rightarrow ac = 1 < \begin{matrix} a = 1 \\ c = 1 \end{matrix}$

$b = 4 \Rightarrow ac = 4 < \begin{matrix} a = 2 \\ c = 2 \end{matrix}$

$b = 6 \Rightarrow ac = 9 < \begin{matrix} a = 3 \\ c = 3 \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} (1, 2; 1) \\ (1, 4, 4) \\ (4, 4, 1) \\ (2, 4, 2) \\ (3, 6, 3) \end{matrix}\right\} 5$

$P(\;) = \frac{5}{216}$

Q_{26} : $2^n = \text{Card}(P(E))$

Q_{27} : $A \subset E$; Card $A = p$; $C_n^p 2^{n-p} = p 2^{n-p}$

Q23 $$\int_0^{\pi} sin^6(x)\,dx =$$

A	0	B	$\frac{\pi}{64}$	C	$\frac{5\pi}{16}$	D	$-\frac{5\pi}{32}$

Q24 *Soient A et B deux points distincts du plan, l'ensemble des points M tel que* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ *est :*

A	un cercle	B	un disque	C	une droite	D	demi droite

Q25 *on lance 3 fois un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on note a, b et c les résultats succéssifs obtenus. on note* $Q(x) = ax^2 + bx + c$*. la probabilité pour que Q admet une seule racine double est :*

A	$\frac{11}{216}$	B	$\frac{7}{216}$	C	$\frac{5}{216}$	D	$\frac{9}{216}$

Q26 *Soit E un ensemble à n élements, et* $A \subset E$ *un sous − ensemble à p éléments.*
le nombre de partie de E est :

A	n^2	B	2^n	C	n^n	D	$n!$

Q27 *le nombre de partie de E qui contiennent un et un seul élément de A est :*

A	$n2^{n-p}$	B	$pn2^{n-p}$	C	$p2^{n-p}$	D	2^{n-p}

Q28 *Soit* $z = -1 + \sqrt{2} + i$ *, alors* $cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) =$

A	$\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$	B	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	C	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	D	$-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

Q29 *Soit* $\alpha > 0$ *, la valeur de l'integrale* $\int_0^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx$ *est :*

A	$\frac{\pi\alpha}{4}$	B	$4\pi\alpha$	C	$\pi\alpha^2$	D	$\frac{\pi\alpha^2}{4}$

Q30 *Soient x et y deux réels strictement positifs,*
on pose : $a = \frac{x+y}{2}$, $b = \sqrt{xy}$ *et* $c = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$ *, alors :*

A	$a \le b \le c$	B	$b \le a \le c$	C	$a \le c \le b$	D	$c \le a \le b$

Q31 *La négation de l'assertion :* $(\forall x \epsilon I)\,(\forall y \epsilon I)\,, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ *est :*

A	$(\exists x \epsilon I)\,(\exists y \epsilon I)\,, f(x) \neq f(y) \Rightarrow x = y$
B	$(\exists x \epsilon I)\,(\exists y \epsilon I)\,, f(x) \neq f(y)$ et $x \neq y$
C	$(\exists x \epsilon I)\,(\exists y \epsilon I)\,, f(x) = f(y)$ et $x \neq y$
D	$(\exists x \epsilon I)\,(\exists y \epsilon I)\,, f(x) = f(y)$ ou $x \neq y$

CENTRE HATTAM — Formation et cours de soutiens

Concours blanc

15juillet 2023

Nom et prénom
Younes eddaoudi

1- Chaque question comporte 5 réponses (A, B, C, D et E) dont une seule réponse est juste ;
2-Avec un stylo à bille (bleu ou noir) cochez sur la feuille réponse à l'intérieur de la case correspondante à chaque réponse juste de la manière suivante : ☒ ou remplissez cette case de la manière suivante : ■ ;
3. L'utilisation de la calculatrice est INTERDITE ;
4. L'utilisation du Blanco sur la feuille réponse est INTERDITE ;
5. Chaque note inférieure ou égale à 4/20 dans une composante au moins, des quatre composantes de l'épreuve est considérée comme note éliminatoire ;
6. Toute réponse fausse pour chaque question vaut 0.
7-L'épreuve comporte 60 QCM réparties en trois composantes :
- Composante 1 : Physique de la question Q21 à la question Q40 ;
- Composante 2 : Chimie de la question Q41 à la question Q60 ;
- Composante 3 : Mathématiques de la question Q61 à la question Q80

Composante3 : mathématique

Q61

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln(1+3x)}{1-\cos(2x)} + a & , x\epsilon]0,1] \\ f(x) = x + \frac{1}{2}, & x\epsilon]-1,0] \end{cases}$

La valeur de a pour que f est continue en 0

A	$\frac{3}{2}$	B	$\frac{2}{3}$
C	0	D	1
☒E	-1		

Q62

Si X est une variable aléatoire binomiale de paramètres $n = 18$ *et* $p = \frac{1}{3}$, *alors l'écart type* $\sigma(x)$ *est* :

☒A	2	B	6
C	4	D	$\frac{1}{6}$
E	-4		

Q63

Soient P et n deux entiers naturels tels que : $1 \leq P \leq n$, *alors* $C_n^{p-1} + C_n^p$ *est égale à* :

A	C_{2n}^{2p}	☒B	C_{n+1}^{p}
C	C_{2n}^{p}	D	C_{n-1}^{p}
E	C_{n+1}^{p+1}		

Q64

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j})$, On considère les deux plans :
(P): $2x+y-z+1=0$
(Q): $x+2y+z+2=0$
Alors on a :

A	$(P) \parallel (Q)$	B	$(P) \perp (Q)$
C	(P)et (Q) se coupent selon une droite dirigée par le vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$	D	(P)et (Q) sont sécantes selon une droite dirigée par le vecteur $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$
E	Autre réponse		

Q65

Soit (u_n) est une suite définie par $(u_n) = \dfrac{(-1)^n(n+2^n)}{n2^{n+1}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$

A	1	B	0,5
C	$+\infty$	D	2
E	0		

$|u_n| \underset{+\infty}{\Rightarrow} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$

Q66

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^x =$$

A	1	B	$+\infty$
C	0	D	e
E	e^{-1}		

Q67

Soit f la transformation du plan complexe définie par l'écriture complexe $z' = iz+1+i$,
alors f est :

A	La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$	B	La rotation de centre $\Omega(i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
C	La rotation de centre $\Omega(1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$	D	L'homothétie de centre $\Omega(i)$ et de rapport $\frac{1}{2}$
E	La translation de vecteur $\vec{u}(\vec{i})$		

Q68

Soit $\theta\epsilon\mathbb{R}$, On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 - e^{-\theta}z + e^{-2\theta} = 0$
L'ensemble des solutions de (E) est :

A	$S = \left\{\frac{e^{\theta}(1-i\sqrt{3})}{2}, \frac{e^{\theta}(1+i\sqrt{3})}{2}\right\}$	B	$S = \left\{\frac{e^{-\theta}(1+i\sqrt{3})}{2}, \frac{e^{-\theta}(1-i\sqrt{3})}{2}\right\}$
C	$S = \{e^{-\theta}, e^{-2\theta}\}$	D	$S = \{e^{-\theta}(1+i), e^{-\theta}(1-i)\}$
E	$S = \{1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3}\}$		

Q69

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$,
l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z-1| = 2|z+i|$ est :

A	un cercle	B	demi droite
C	une droite	D	médiatrice
E	un disque		

جمع عددين عقديين لهما نفس المعيار

Q70

Dans l'ensemble on pose : $z = 6 + 3\sqrt{2} + i\,(6 + 3\sqrt{6})$, *alors* :

A	$z = 12\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{\frac{7\pi}{12}i}$	B	$z = 12\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{\frac{7\pi}{24}i}$
C	$z = 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{\frac{\pi}{12}i}$	D	$z = 2\sqrt{6}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{\frac{\pi}{12}i}$
E	$z = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}e^{\frac{\pi}{7}i}$		

Q71

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^x - 2^x}{x} =$$

A	$ln3$	B	$-ln2$
C	$ln6$	D	3
E	*Autre réponse*		

Q72

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+e^{-\sin x}}\,dx =$$

A	$ln2$	B	$ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$
C	$ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$	D	π
E	0		

Q73

La valeur moyenne sur $[2,3]$ *de la fonction* f *définis par* $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$

A	$\frac{1}{3}ln\left(\frac{5}{8}\right)$	B	$3ln\left(\frac{5}{8}\right)$
C	$-\frac{1}{3}ln\left(\frac{5}{8}\right)$	D	$ln\left(\frac{2}{3}\right)$
E	$ln3 - ln2$		

$\int_a^b e^{\alpha x}\sin\beta x \wedge \int_a^b e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$

Q74

On considère les deux integrales suivantes $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^{1-x}\,dx$ *et* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^{1-x}\,dx$

A	$I = e^{\frac{\pi}{2}}$ et $J = 1$	B	$I = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $J = e^{\frac{\pi}{2}}$
C	$I = \frac{e}{2}\left(1 + e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$ et $J = \frac{e}{2}\left(1 - e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$	D	$I = e + e^{1-\frac{\pi}{2}}$ et $J = e - e^{1-\frac{\pi}{2}}$
E	$I = \frac{1+e}{2}$ et $J = \frac{1-e}{2}$		

Q75

$U_1 = 1$

C

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par:* $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - u_n}$, *on pose* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ *et* $w_n = v_n - \dfrac{1}{2}$

A	*la suite* (w_n) *est géométriquede raison* $\frac{1}{3}$	B	*la suite* (w_n) *est arithmétique de raison* $\frac{1}{2}$
C	$(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, $u_n = \frac{2}{3^{n-1}+1}$	D	$(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, $u_n = \frac{2}{3^n+1}$
E	$(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, $u_n = \frac{2}{3^n-1}$		

Q76

Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ *la suite définie par :* $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx$

A	(I_n) *est une suite décroissante*	**B**	$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ I_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n} - I_n$
C	$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ I_{n+1} = n - I_n$	**D**	$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ I_{n+1} = \frac{1-e^n}{n} - I_n$
E	$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ I_{n+1} = \frac{1}{n} - I_n$		

Q77

Soit f *une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$
si $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(2x^2+1) = 2f(x^2+2x) + x^5$ *, alors* $f'(3) =$

A	3	**B**	-5
C	$-2{,}5$	**D**	$-1{,}25$
E	Autre réponse		

Q78

La valeur de la limite : $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

A	2	**B**	0
C	$+\infty$	**D**	0,5
E	Autre réponse		

Q79

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}} \end{cases}$ *, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n =$

A	0	**B**	$+\infty$
C	4	**D**	$-\infty$
E	Autre réponse		

Q80

Soit f *est la fonction définie par* $f(x) = \frac{e^{x^2+3}}{x}$ *, alors* $f'(x)$ *est égale à :*

A	$\left(2 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2+3}$	**B**	$\frac{x-1}{x^2} e^{x^2+3}$
C	e^{x^2+3}	**D**	$\left(\frac{2x-1}{x^2}\right) e^{x^2+3}$
E	Autre réponse		