Collège Ingénierie et Architecture. Session : juin-2022

Mathématiques
Durée : 1 h 30 min

- Les réponses doivent être bien rédigées et justifiées.
- L'utilisation des téléphones et calculatrices n'est pas autorisée.

Exercice 1

Soit f la fonction réelle définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4-8\ln(x)}{x^2}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Vérifier que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale à droite en 0.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puis interpréter le résultat géométriquement.
2. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{16(\ln(x)-1)}{x^3}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
   (c) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. (a) Etudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet un unique point d'inflexion dont on déterminera son abscisse.
   (c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(on donne $e \approx 2,71$, $\sqrt{e} \approx 1,65$ et $e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79$).
   (d) Discuter graphiquement suivant la valeur du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $4(1-2\ln(x)) = mx^2(x-e)$.
4. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $x = \sqrt{e}$ et $x = e$.
   (a) Montrer , en utilisant une intégration par parties que $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \frac{3\sqrt{e}-4}{2e}$.
   (b) Calculer la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n}u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3.

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Est-ce que la suite (u_n) est convergente ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \geq n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_1 + \ldots + u_n$.
   (a) Déterminer la monotonie de la suite (S_n).
   (b) Montrer que la suite (S_n) est majorée.
   (c) Que peut-on dire de la suite (S_n) ?

Lexique Français-Arabe

Français	عربي
Abscisse	أفصول
Aire	مساحة
Asymptote verticale	مقارب عمودي
Axe	محور
Convergente	متقاربة
Courbe représentative	منحنى ممثل
Décroissante	تناقصية
Dérivable	قابلة للإشتقاق
Droite	مستقيم
Domaine délimité	حيز محصور
Entier naturel	عدد صحيح طبيعي
Équation	معادلة
Fonction réelle	دالة حقيقية
Géométrique	هندسية
Géométriquement	هندسيا
Graphiquement	مبيانيا
Intégration par parties	مكاملة بالأجزاء
Intervalle	مجال
Limite	نهاية
Monotonie	رتابة
Nombre	عدد
Nul	منعدم
Paramètre réel	وسيط حقيقي
Point d'inflexion	نقطة انفعطاف
Raison	أساس
Repère orthonormé	معلم متعامد ممنظم
Signe	إشارة
Solution	حل
Strictement positifi	موجب قطعا
Suite majorée	متتالية مكبورة
Tableau de variation	جدول التغيرات
Terme	حد
Valeur	قيمة

Collège Ingénierie et Architecture. Session : Juin-2022

Physique
Durée : 1 heure 30 minutes

- Les réponses doivent être bien rédigées et justifiées.
- L'utilisation des téléphones n'est pas autorisée.
- L'utilisation des calculatrices non programmables est autorisée.

Exercice 1 : Propagation des ondes

I - Recopier le numéro de la question et écrire, parmi les affirmations proposées, la lettre qui correspond à la réponse juste.

1. Lors de la propagation d'une onde :

A	il y a transport de la matière et il n'y a pas transport de l'énergie	**C**	il n'y a ni transport de la matière ni transport de l'énergie
B	il y a transport de l'énergie et il n'y a pas transport de la matière	**D**	il y a transport de la matière et de l'énergie

2. Une onde est dite longitudinal si :

A	la perturbation se fait dans la même direction que celle de la propagation	**C**	la perturbation se fait perpendiculairement à la direction de la propagation
B	elle se propage dans le vide	**D**	la propagation se fait sans amortissement

3. La lumière est une onde :

A	électromagnétique	**C**	mécanique longitudinale
B	mécanique transversale	**D**	qui nécessite un milieu matériel pour se propager

4. Lors de la réfraction d'une onde : Un milieu dans lequel la célérité d'une onde dépend de sa fréquence est dit :

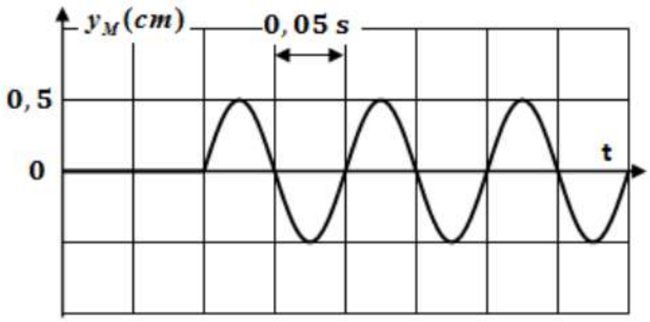
A	Diffusant	**C**	Dispersif
B	Diffractant	**D**	Autre réponse

5. Deux point M_1 et M_2 vibrent en phase si :

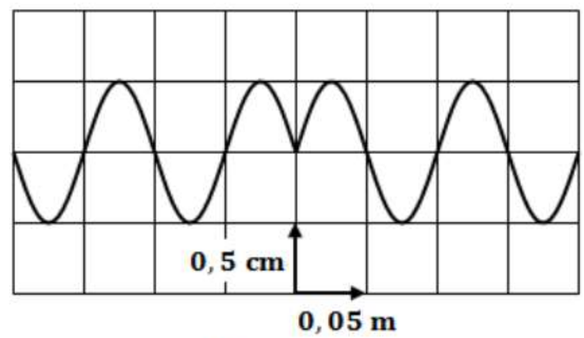
A	$M_1M_2 = k.\lambda$	**C**	$M_1M_2 = (2k+1).\frac{\lambda}{2}$
B	$M_1M_2 = k+\lambda$	**D**	$M_1M_2 = (k+\frac{1}{2}).\lambda$

II. Propagation d'une onde mécanique à la surface de l'eau

A la surface de l'eau, un vibreur produit une onde progressive sinusoïdale de fréquence N. Une étude expérimentale a permis d'obtenir le document (a) représentant l'élongation d'un point M de la surface de l'eau en fonction du temps et le document (b) représentant l'aspect de la surface de l'eau à un instant donné.



Document (a)

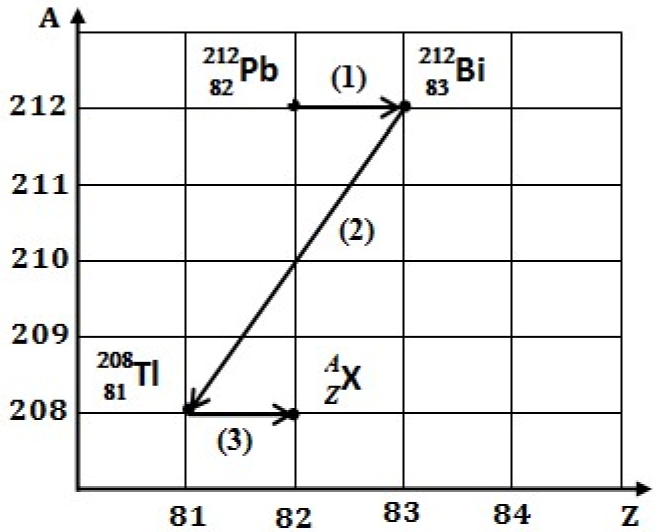


Document (b)

1. L'onde qui se propage à la surface de l'eau est-elle transversale ou longitudinale ? Justifier.
2. Déterminer la longueur d'onde λ de l'onde étudiée.
3. Déterminer la période **T** de l'onde.
4. Déduire la célérité **V** de l'onde à la surface de l'eau.
5. Exprimer le retard temporel $\boldsymbol{\tau_{SM}}$ du mouvement de M par rapport à la source S, en fonction de la période T de l'onde.
6. En déduire la distance SM entre la source et le point M.

Exercice 2 : Radioactivité

La figure suivante donne la série de désintégrations successives du noyau de plomb $^{212}\mathbf{Pb}$, les noyaux fils de Bismuth ($^{212}\mathbf{Bi}$) et Tellure ($^{208}\mathbf{Tl}$) sont instables, le noyau final **X** est noyau inconnu.
On rappelle que les type de désintégration peuvent être de type α$(emission\ de\ {}^{4}_{2}He)$, β^{-}, ou β^{+}.



1. Donner les équations et les types des désintégrations (1), (2) et (3)
2. X est un noyau du : **A)** Plomb **B)** Bismuth **C)** Tellure **D)** Uranium
3. Préciser, en justifiant, si les nucléides $^{238}\mathbf{Pb}$ et **X** sont des isotopes
4. Donner la composition du noyau $^{212}_{82}\mathbf{Pb}$ en neutrons et protons

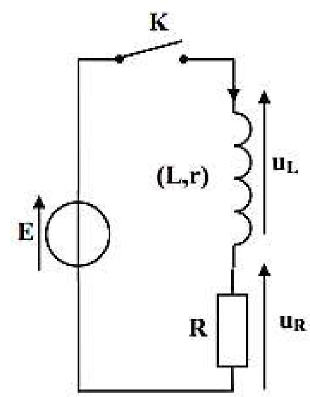
Choisir entre l'exercice 3 et 4.

Exercice 3 : Electricité (Circuit RL)

On réalise un circuit électrique comportant une bobine d'inductance **L** et de résistance **r**, un conducteur ohmique de résistance **R**, un générateur de tension de f .é.m. **E** et interrupteur K.

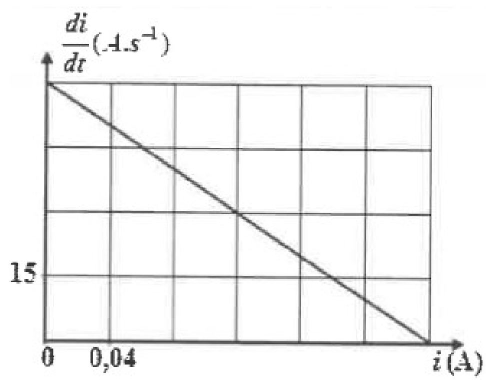
On donne : **E=12V**, **R = 42 Ω**

On ferme K a l'instant t =0



1. Montrer que l'équation différentielle de i(t) s'écrit sous la forme
$$\frac{di}{dt} = -\frac{R+r}{L}.i + \frac{E}{L}$$

La courbe de la figure suivant, donne les variations $\frac{di}{dt}$ en fonction de **i** :

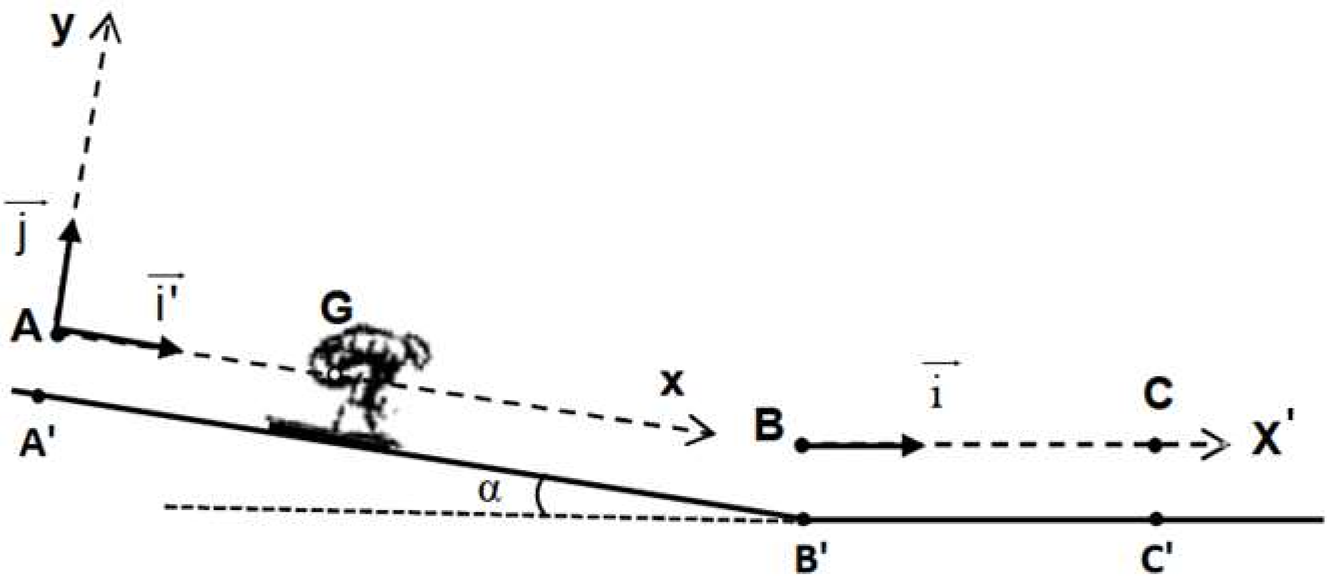


2. En exploitant l'équation différentielle et la courbe, déterminer la valeur de **L** et de **r**.
3. Déduire l'expression et la valeur de la constante du temps **τ.**
4. Déterminer l'expression et la valeur de l'intensité maximale $\mathbf{I_m}$ du courant en régime permanent.
5. Déterminer l'énergie emmagasinée par la bobine en régime permanent.
6. Déterminer l'expression et la valeur de la tension $\mathbf{U_L}$ aux bornes de la bobine en régime permanent.
7. On règle à nouveau la résistance du conducteur ohmique sur la valeur **R'=2R**, la nouvelle constante du temps est τ'. Comparer τ et τ', en déduire l'effet de la résistance sur l'établissement du courant dans le circuit.

Exercice 4 : Mécanique - Mouvement d'un solide sur un plan incliné

Un skieur glisse sur une piste de ski, constituée par deux parties :

- Une partie A'B' rectiligne et inclinée d'un angle a par rapport à l'horizontale.
- Une partie B'C' rectiligne et horizontale



Données : m =65 kg ; g =10 m.s^{-2} ; α = 23° ;

I- Etude du mouvement sur le plan incliné A'B' :

Le skieur se met en mouvement **sans vitesse initiale** (**v_A=0**) depuis le point A , confondu avec G à l'instant t=0, origine des dates. Le contact entre le plan incliné AB et le skieur se fait avec frottements, modélisés par une force de frottements constante **f =15 N**.

1. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'accélération du centre G s'exprime sous la forme : $a_x = g.\sin\alpha - \frac{f}{m}$
2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :**v_x(t)** = **b** .t + **c** . Déterminer les valeurs de **b** et de **c**
3. Déduire la valeur de **t_B**, l'instant de passage du skieur par la position B avec une vitesse égale à **90km/h**.

II. Étude du mouvement sur le plan horizontal B'C' :

Le skieur continue son mouvement sur le plan horizontal BC pour **s'arrêter** à la position **C**. Le contact entre le plan horizontal et le système (S) se fait avec frottements, modélisés par une force de frottements constante **f '**. On choisit B comme nouvelle origine des abscisses (x_B=0) et l'instant de passage de G par *B* comme nouvelle origine des dates (t_B=0). On rappelle que **V_B=90km/h**

4. En appliquant la deuxième loi de Newton, trouver l'intensité **f '** sachant que la valeur de l'accélération est **$a_{x'}$ = - 3m.s^{-2}**
5. Déterminer **t_C** , l'instant d'arrêt du système.
6. Déduire la distance **BC** parcourue par le skieur.