Collège Ingénierie et Architecture. Session : juillet-2022

Mathématiques
Durée : 1 h 30 min

- Les réponses doivent être bien rédigées et justifiées.
- L'utilisation des téléphones et calculatrices n'est pas autorisée.

Exercice 1

Soit f la fonction réelle définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x} - 2\ln(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $||\vec{i}|| = 1cm$.

1. (a) Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - 2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement.

2. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale à droite en 0.

3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

   (b) Montrer que $f'(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Calculer $f(1)$, puis en déduire le signe de $f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

5. Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

6. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

7. Calculer l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = \dfrac{2}{2\sqrt{2} - u_n}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n < \sqrt{2}$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{2} - u_n}$.

   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - u_n}$.

   (b) En déduire que la suite (v_n) est arithmétique.

   (c) Exprimer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = \dfrac{n\sqrt{2}}{n+1}$.

   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \ln(u_1) + \ldots + \ln(u_n)$.

   (a) Montrer que : $S_n = \dfrac{1}{2} n \ln(2) - \ln(n+1)$.

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Lexique Français-Arabe

Français	عربي
Abscisse	أفصول
Aire	مساحة
Arithmétique	حسابية
Asymptote	مقارب
Asymptote verticale	مقارب عمودي
Axe	محور
Convergente	متقاربة
Courbe	منحنى
Courbe représentative	منحنى ممثل
Croissante	تزايدية
Dérivable	قابلة للإشتقاق
Droite	مستقيم
Domaine	حيز
Domaine délimité	حيز محصور
Entier naturel	عدد صحيح طبيعي
Équation	معادلة
Fonction	دالة
Fonction réelle	دالة حقيقية
Géométriquement	هندسيا
Intervalle	مجال
Limite	نهاية
Nul	منعدم
Point	نقطة
Point d'inflexion	نقطة انفعطاف
Repère	معلم
Repère orthonormé	معلم متعامد ممنظم
Signe	إشارة
Suite	متتالية
Tableau de variation	جدول التغيرات
Verticale	عمودي