SCIENCE EXPERIMENTAL

UNIVERSITE MOULAY ISMAIL

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ARTS ET METIERS-MEKNES

Concours d'entrée en Première année de l'ENSAM de Meknès
Filières : Sciences Expérimentales, et Techniques

Meknès, le 09 Aout 2011

Epreuve de Physique
Durée : 2h 30

- *L'épreuve contient 6 pages*
- *Répondre dans la feuille : « Fiche de réponses »*
- *Toute application numérique manquant l'unité ne sera pas comptée*

<u>Les pages 5/6 et 6/6 sont des fiches des réponses à rendre.</u>

Exercice 1.

On considère un corps solide, de masse m, qui glisse horizontalement sur le sol suivant l'axe (Ox) du repère galiléen $R(Oxyz)$, Fig. 1. On lui donne une vitesse initiale v_0 (sens positif de Ox), soit d la distance parcourue avant de s'arrêter à cause du frottement entre le corps mobile et la surface de glissement. On rappelle qu'en présence du frottement, la force $\vec{R}$ du sol sur le solide est telle que $\vec{R} = N\,\vec{y} + T\,\vec{x}$ avec $|T| = \mu N$ (fig.2), μ est une constante positive, appelée coefficient de frottement ; le sens de la composante T est de sens contraire du mouvement du corps par rapport au sol.

Fig.1

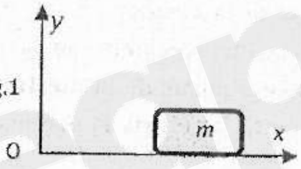
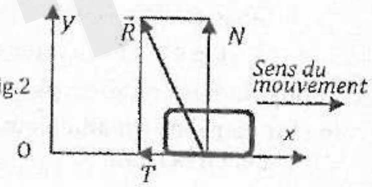


Fig.2



1. En utilisant la deuxième loi de Newton, exprimer l'accélération γ du corps en fonction de μ et g. En déduire la nature de son mouvement.
2. Exprimer le coefficient de frottement μ en fonction de v_0, g et d. Calculer μ pour $v_0 = 10\,m/s$, $g = 10\,m/s^2$ et $d = 50\,m$.
3. Déterminer l'équation horaire $x(t)$; A l'instant initial $(t=0)$, on prend l'abscisse de m : $x = 0$.
4. Exprimer le temps t_1 mis pour parcourir la distance d, en fonction de v_0 et d. Calculer t_1.
5. On réalise un autre essai dans les mêmes conditions, mais cette fois-ci, le plan est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, le corps se déplace vers le haut suivant la droite de plus grande pente. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer le coefficient de frottement μ en fonction de v_0, g, d et α.

Exercice 2.

Soit le système composé de deux masses m_1 et m_2 et d'une poulie de rayon R et de moment d'inertie J_Δ par rapport à son axe (fixe). Le câble liant les deux masses et passant par la poulie est inextensible et ne glisse pas sur la poulie. A l'aide d'un moteur, la masse m_1 est tirée par une force de grandeur F dont la droite d'action fait un angle α par rapport à l'horizontale (Fig.3). Le coefficient de frottement entre m_1 et la surface de glissement est μ. On note par γ l'accélération des deux masses.

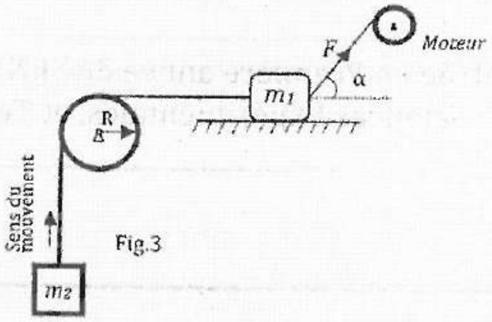


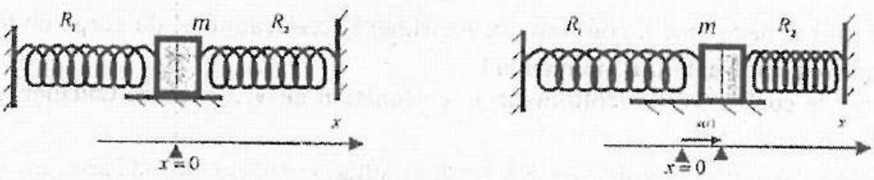
Fig.3

6. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la masse m_1, exprimer la force T_1, appliquée par le câble sur m_1, en fonction de F, α, μ, m_1, g et γ.
7. En appliquant la même loi à la masse m_2, exprimer la force T_2, appliquée par le câble sur m_2, en fonction de m_2, g et γ.
8. Exprimer l'accélération γ, en fonction de F, α, μ, m_1, m_2, g, J_Δ et R.
9. Le moteur qui tire la masse m_1 permet de régler la valeur de F, pour quelle valeur de F, l'accélération γ sera nulle.
10. Le moteur cesse d'appliquer la force F (c'est-à-dire : $F=0$), exprimer l'accélération γ des masses m_1 et m_2 en fonction de m_1, m_2, g, J_Δ et R. On néglige les frottements dans cette question.

Exercice 3.

On considère le système composé d'une masse ponctuelle m et deux ressorts R_1 et R_2 de raideurs respectives k_1 et k_2 (Fig.4). Les frottements sont négligés. Le déplacement de la masse m est horizontal et sa position est repérée par l'abscisse $x(t)$, comptée à partir de la position où les deux ressorts sont en état de repos (ni allongement ni raccourcissement). On écarte la masse de sa position d'équilibre ($x = 0$) puis on la lâche.

Fig.4



11. Exprimer les énergies potentielles E_{p1} et E_{p2} des deux ressorts en fonction de k_1, k_2 et $x(t)$.
12. Exprimer l'énergie cinétique E_c de la masse m en fonction de m et la vitesse $\dot{x}(t)$.
13. Par application du théorème de conservation de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle du mouvement de la masse m. En déduire la période du mouvement du système en fonction de m, k_1 et k_2.

Dans ce qui suit, on prend $k = k_1 = k_2$.

14. Par un chronomètre, on mesure la durée de 100 périodes et on trouve $\Delta t = 50\,s$, exprimer puis calculer la raideur k sachant que la masse $m = 0.1\,Kg$.
15. Donner l'équation horaire $x(t)$ (avec application numérique) sachant qu'à l'instant $t = 0$: $x(0) = 4\,cm$ et $\dot{x}(0) = 1\,m/s$.

Exercice 4.

Le montage ci-contre comporte un générateur idéal de force électromotrice constante E =24V, deux condensateurs de capacités respectives : $C_1 = 10\ \mu F$ et $C_2 = 150\ \mu F$ et une bobine d'inductance L.

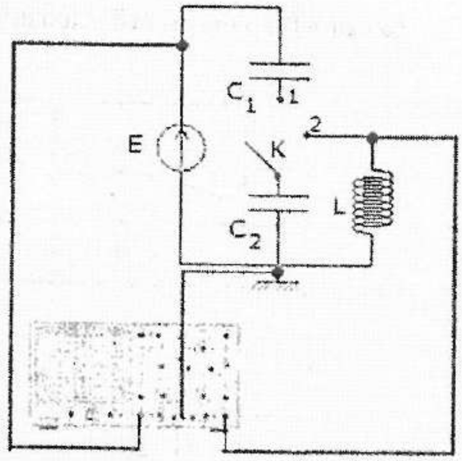


Fig.4

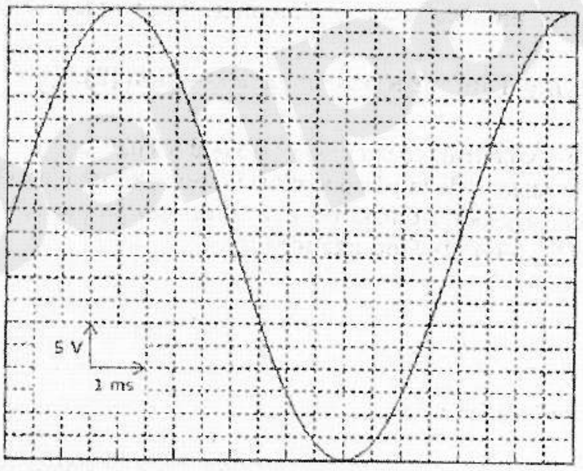
L'interrupteur k est en position (1).

16. Donner l'expression de la capacité équivalente C des deux capacités C_1 et C_2.
17. Calculer sa valeur numérique.
18. Donner l'expression de la tension aux bornes de la capacité C_2 lorsque les deux condensateurs sont complètement chargés.
19. Calculer sa valeur numérique.
20. Donner l'expression de la charge électrique Q_2 du condensateur C_2.

L'interrupteur k est en position (2).

La figure (5) illustre la tension aux bornes de la bobine L.

Fig.5

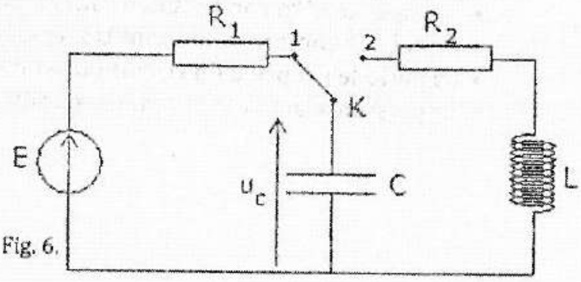


21. Donner l'équation différentielle vérifiée par cette tension qu'on note $u_L(t)$.
22. Donner l'expression de la tension $u_L(t)$.
23. Donner l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de L et C_2.
24. Calculer sa valeur numérique.
25. Déduire la valeur de l'inductance L.

Exercice 5.

Le montage ci-contre comporte un générateur idéal de force électromotrice constante E =15V, deux résistances R_1 et R_2, un condensateur de capacité C = 42 µF et une bobine d'inductance L.

Fig. 6.



La figure (7) montre l'évolution de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur.

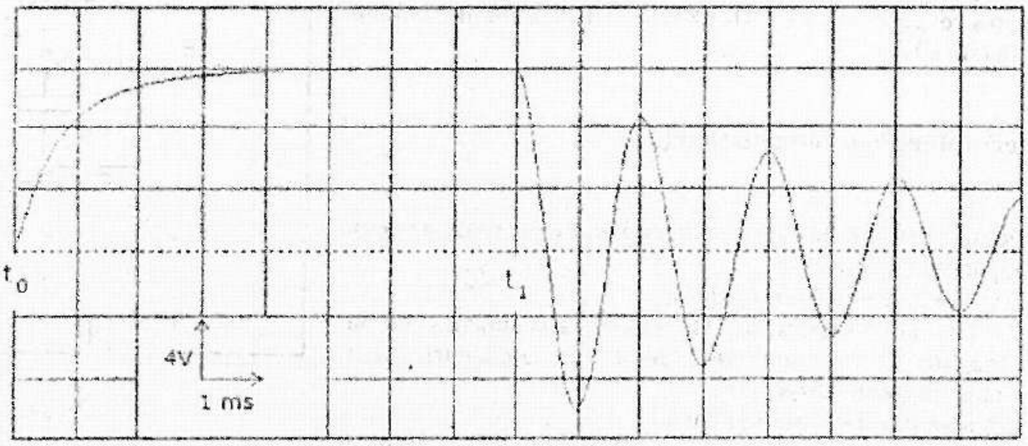


Fig. 7.

A l'instant t_0, l'interrupteur K est en position (1).

26. La constante du temps du circuit RC étant égale à 0.9 ms. Quelle est la valeur de la résistance R_1 ?
27. Une fois le condensateur est complètement chargé, calculer l'énergie qui y est emmagasinée.

A l'instant t_1, l'interrupteur K bascule à la position (2).

28. Déterminer la valeur de la pseudo-période d'oscillation.
29. Donner l'expression de la période d'oscillation propre d'un circuit LC.
30. Sachant que la pseudo-pulsation peut être approximée par la pulsation propre d'un circuit LC, déterminer la valeur de l'inductance L.

Exercice 6.

Répondre par vrai ou faux.

- Quand la fréquence du courant augmente, l'impédance d'un condensateur augmente.
- Quand la fréquence du courant augmente, l'impédance d'une bobine augmente.
- La valeur efficace d'une tension sinusoïdale de valeur maximale 5V est égale à 3.53V.
- La valeur maximale du déphasage entre deux tensions sinusoïdales est égale à π rad.
- La capacité équivalente de deux condensateurs en série est toujours de valeur plus faible que la plus faible des deux capacités.
- La résistance équivalente de deux résistances en parallèle est toujours de valeur plus faible que la plus faible des deux résistances.
- La capacité d'un condensateur augment d'autant plus que l'épaisseur de son diélectrique est faible.
- En régime continu, le courant traversant un condensateur est toujours nul.
- La période propre d'un circuit LC est inversement proportionnelle à la capacité.
- La puissance active consommée par un dipôle est toujours supérieure à la puissance apparente.

Université Moulay Ismaïl

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filières : Sciences Expérimentales et Techniques

Epreuve de Mathématiques

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (**1Pt**))

Questions	Réponses
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (a) La somme de deux fonctions monotones est monotone (b) $\forall x > 1, \dfrac{x-1}{\ln(x-1)} \in \mathbb{R}$ (c) Soit A, B et C trois ensembles, on a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ (d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$ (e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel	
Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes : (a) La fonction f est constante sur $[0, 5]$ (b) La fonction ψ est strictement décroissante et positive (c) La fonction g n'est pas injective sur l'ensemble E (d) La fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ (e) Tout réel possède une racine carré dans $\mathbb{R}$	

Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne Réponses (Chaque question est notée sur (**2Pts**))	
Questions	Réponses
Soit le segment $P_1(-8, 5)$ et $P_2(6, 11)$. Déterminer les coordonnées du point $P(x, y)$ situé aux deux tiers de ce segment à partir du point P_1	
Trouver les entiers relatifs a, b et c de sorte que pour tout $x \in I\!R$, $(x-a)(x-10)+1 = (x+b)(x+c)$	
E, F et G étant trois ensembles finis, exprimer $card(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles E, F, G, $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	
Exprimer à l'aide d'intervalles de $I\!R$ l'ensemble suivant : $A = \{x \in I\!R \;/\; 2 \leq \lvert x \rvert < 4\}$	
Représenter graphiquement le domaine limité par : $x^2 + y^2 + 2y \leq 3$, $x + y \leq 0$ et $x > -1$	
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples $+$, $-$, $*$ et $/$	
Calculer le nombre complexe $B = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$	
Calculer $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	
Calculer $\beta = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+7)$	
Diviser $20xy + 5y^2 - 10y - 12x + 6$ par $5y - 3$ avec $x \in I\!R$ est un paramètre fixé	

Questions à réponse précise, Partie C

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))	
Questions	Réponses
Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0, 1]$?	
Déterminer la fonction f telle que $g o f(x) = 2\|x\|$ sachant que g est la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	
Calculer $\int t^3 \cos t^2 \, dt$	
Soit la fonction f définie sur $I = [0, 3]$ par $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in]0, 2[\\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in]2, 3] \end{cases}$$ Calculer $F(x) = \int_0^x f(x)\, dx$ avec $x \in I$	
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} avec $n > 1$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f(x) = x \ln\|x+1\|$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2e^x + 1}{1 - e^x}$	
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x}}$	
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\|E(x)\| = 3$ avec $E(x)$ est la partie entière de x	
Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$	

2011

Cette feuille ne doit porter **aucun signe indicatif ni signature**
Filières : Sc. Exp., et Tech

FICHE DES REPONSES : Exercices 1, 2 et 3		Note
1. Accélération de la masse m : $\gamma = -\frac{\mu N}{m}$	Nature mouvement : rectiligne uniformément retardée	
2. Coefficient de frottement : $\mu = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{d}$	A.N. $\mu = 0,1$	
3. Equation horaire : $x(t) = -\frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t$		
4. Temps mis : $t_1 = -\frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t = d$	A.N. $t_1 = 10s$	
5. Coefficient de frottement : $\mu = \frac{\frac{1}{2}V_0^2 - gd\sin\alpha}{gd\cos\alpha}$		
6. Force du câble sur m_1 : $T_1 = F\cos\alpha + \mu m g + m\gamma$		
7. Force du câble sur m_2 : $T_2 = m_2 g + m\gamma$		
8. Accélération de la masse m : $\gamma = \frac{FR\cos\alpha + \mu m_1 g R - m_2 g R}{m_2 R - m_1 R + (J_\Delta/R)}$		
9. Force F pour laquelle $\gamma = 0$: $F = \frac{m_2 g R - \mu m_1 g R}{R\cos\alpha}$		
10. Accélération des masses : $\gamma = \frac{\mu m_1 g R - m_2 g R}{m_2 R - m_1 R + (J_\Delta/R)}$		
11. Energies potentielles : $E_{p1} = \frac{1}{2}(K_1 - K_2)x^2$	$E_{p2} = \frac{1}{2}(K_2 - K_1)x^2$	
12. Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m \ddot{x}^2$		
13. Equation différentielle : $\ddot{X} + \frac{K_1 + K_2}{m} X = 0$	Période : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1 + K_2}}$	
14. Raideur des ressorts : $k = K_1 + K_2$	A.N. $k = 6,8 \times 10^2$ N/m	
15. Equation horaire : $x(t) = 4\cos(12,56t)$		

2011

Cette feuille ne doit porter **aucun signe indicatif ni signature**
Filières : Sc. Exp., et Tech

FICHE DES REPONSES : Problème et Exercice 4

Partie 1		Réponse	Note
16.	La valeur limite de la tension $u_c(t)$:	$u_c(t \to +\infty) =$	
17.	L'amplitude de la tension E :	E=	
18.	L'équation différentielle qui lie la tension $u_c(t)$ à la tension E :		
19.	L'expression de la constante du temps du dipôle :	$\tau =$	
20.	La valeur numérique de la constante de temps :	$\tau =$	
21.	La valeur de la capacité C :	C	
22.	L'énergie emmagasinée dans la capacité une fois complètement chargée :	$E_c =$	
23.	L'équation différentielle vérifiée par la tension $u_c(t)$:		
24.	L'expression exacte de la tension :	$u_c(t) =$	
25.	La valeur de la constante de temps ?	$\tau =$	
26.	La valeur de la résistance R_2 :	$R_2 =$	

Partie 2		Réponse	Note
27.	La valeur efficace de la tension E :	$E_{eff} =$	
28.	La valeur de la fréquence f :	f =	
29.	Le déphasage entre les deux tensions :	$\varphi =$	
30.	La valeur de la capacité C :	C =	

Exercice 4	**Réponse juste : +1 & Réponse fausse : -1**	Réponse (V/F)	Note (+1/-1)
Quand la fréquence du courant augmente, l'impédance d'un condensateur augmente.		F	
Quand la fréquence du courant augmente, l'impédance d'une bobine augmente.		V	
La valeur efficace d'une tension sinusoïdale de valeur maximale 5V est égale à 3.53V.		V	
La valeur maximale du déphasage entre deux tensions sinusoïdales est égale à π rad.		F	
La capacité équivalente de deux condensateurs en série est toujours de valeur plus faible que la plus faible des deux capacités.		V	
La résistance équivalente de deux résistances en parallèle est toujours de valeur plus faible que la plus faible des deux résistances.		V	
La capacité d'un condensateur augment d'autant plus que l'épaisseur de son diélectrique est faible.		F	
En régime continu, le courant traversant un condensateur est toujours nul.		F	
La période propre d'un circuit LC est inversement proportionnelle à la capacité.		F	
La puissance active consommée par un dipôle est toujours supérieure à la puissance apparente.		F	

Université Moulay Ismaïl

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filières : Sciences Expérimentales et Techniques

Epreuve de Mathématiques

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur **(1Pt)**)

Questions	Réponses
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (a) La somme de deux fonctions monotones est monotone (b) $\forall x > 1, \frac{x-1}{\ln(x-1)} \in \mathbb{R}$ (c) Soit A, B et C trois ensembles, on a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ (d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$ (e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel	a) Fausse. (b) Fausse : $D_f =]1,2[\cup]2,+\infty[$ (c) Fausse, pour $A = B = \mathbb{R}$ et $C = \mathbb{R}^+$ $(A \cup B) \cap C = \mathbb{R}^+$ et $A \cup (B \cap C) = \mathbb{R}$ (d) Vrai, (e) Fausse, $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme qui est nulle n'est pas irrationel
Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes : (a) La fonction f est constante sur $[0, 5]$ (b) La fonction ψ est strictement décroissante et positive (c) La fonction g n'est pas injective sur l'ensemble E (d) La fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ (e) Tout réel possède une racine carré dans $\mathbb{R}$	(a) $(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in [0,5])\ f(x) = k$ (e) $(\forall b \in \mathbb{R})(\exists a \in \mathbb{R})\ b = a^2$

Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne Réponses (Chaque question est notée sur **(2Pts)**)

Questions	Réponses
Soit le segment $P_1(-8, 5)$ et $P_2(6, 11)$. Déterminer les coordonnées du point $P(x, y)$ situé aux deux tiers de ce segment à partir du point P_1	
Trouver les entiers relatifs a, b et c de sorte que pour tout $x \in I\!R$, $(x-a)(x-10)+1 = (x+b)(x+c)$	
E, F et G étant trois ensembles finis, exprimer $card(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles E, F, G, $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	$Card(E \cup F \cup G) = Card(E) + Card(F) + Card(G) - Card(E \cap F) - Card(E \cap G) - Card(F \cap G) + Card(E \cap F \cap G)$
Exprimer à l'aide d'intervalles de $I\!R$ l'ensemble suivant : $A = \{x \in I\!R \ / \ 2 \leq \|x\| < 4\}$	$A = [2, 4] \cup [-4, -2]$
Représenter graphiquement le domaine limité par : $x^2 + y^2 + 2y \leq 3$, $x + y \leq 0$ et $x > -1$	
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples +, −, * et /	$6 \div (1 - 5 \div 7) = 6 \div \frac{2}{7} = 21$
Calculer le nombre complexe $B = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$	$B = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]^{24} = \left[2^{12}, 14\pi\right] = 2^{12} = 4096$
Calculer $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	$\alpha = \frac{2}{15}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{27}{10}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$
Calculer $\beta = \sum_{k=1}^{n}(2k+7)$	$\beta = \sum_{k=1}^{n}(2k+7) = n(n+8)$
Diviser $20xy + 5y^2 - 10y - 12x + 6$ par $5y - 3$ avec $x \in I\!R$ est un paramètre fixé	

Questions à réponse précise, Partie C

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))	
Questions	Réponses
Pour quelles valeurs de $\beta \in I\!R$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0,\ 1]$?	
Déterminer la fonction f telle que $gof\,(x) = 2\lvert x\rvert$ sachant que g est la fonction définie par $g\,(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	
Calculer $\int t^3 \cos t^2\ dt$	$-\frac{\cos^2 t}{4} + \frac{t^4 \cdot \cos^2 t}{4} + \frac{1}{4}$
Soit la fonction f définie sur $I = [0,\ 3]$ par $f\,(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in]0,\ 2[\\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in]2,\ 3] \end{cases}$ Calculer $F\,(x) = \int_0^x f\,(x)\,dx$ avec $x \in I$	
On considère, pour tout $n \in I\!N^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} avec $n > 1$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f\,(x) = x \ln \lvert x+1\rvert$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ de la fonction f, définie sur $I\!R^*$ par $f\,(x) = \dfrac{2e^x + 1}{1 - e^x}$	
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x}}$	
Résoudre dans $I\!R$ l'équation $\lvert E\,(x)\rvert = 3$ avec $E\,(x)$ est la partie entière de x	
Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0,\ 2\pi[$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$	

SCIENCE MATH A & B

Université Moulay Ismaïl

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne Réponses	(NB : Chaque question est notée sur (1Pt))
Questions	Réponses
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (a) Toute application injective d'un ensemble dans lui même est bijective (b) $\forall x > 1, \dfrac{x-1}{\ln(x-1)} \in \mathbb{R}$ (c) Soit A, B et C trois ensembles, on a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ (d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$ (e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel	
Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes : (a) La fonction f est constante sur $[0, 5]$ (b) La fonction g n'est pas injective sur l'ensemble E (c) La fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ (d) Tout réel possède une racine carré dans $\mathbb{R}$ (e) Etant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe	

Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))

Questions	Réponses
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(x^2) = (x^2+1)P(x)$	
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $198x+216y = 36$	
E, F et G étant trois ensembles finis exprimer $card(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles E, F, G, $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	
Exprimer à l'aide d'intervalles de $\mathbb{R}$ l'ensemble suivant : $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 \leq \lvert x \rvert < 4\}$	
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples +, −, * et /	
Calculer le nombre complexe $B = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$	
Calculer $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	
Calculer $\beta = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+7)$	
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on contidère les points A, B et C de coordonnées : $A(2,4)$, $B(-2,1)$ et $C(4,3)$. On note d la distance du point A à la droite (BC). Donner la valeur de d.	
Calculer la limite de la suite dont le terme général est donné par : $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\cdots$	

Questions à réponse précise, Partie III

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur **(2Pts)**)

Questions	Réponses
Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0,\, 2\pi[$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$	
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lvert E(x)\rvert = 3$ avec $E(x)$ est la partie entière de x	
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}}$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f(x) = x\ln\lvert x+1\rvert$	
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x}\,dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} avec $n > 1$	
Soit la fonction f définie sur $I = [0,\, 3]$ par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in]0,\, 2[\\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in]2,\, 3] \end{cases}$ Calculer $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ avec $x \in I$	
Calculer $\int t^3 \cos t^2\ dt$	
Déterminer la fonction f telle que $gof(x) = 2\lvert x\rvert$ sachant que g est la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	
Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0,\, 1]$?	

UNIVERSITE MOULAY ISMAIL

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ARTS ET METIERS-MEKNES

Concours d'entrée en Première année de l'ENSAM de Meknès
Filières : Sciences Mathématiques A et B

Meknès, le 09 Aout 2011

Epreuve de Physique
Durée : 2h 30

- *L'épreuve contient 6 pages*
- *Répondre dans la feuille : « Fiche des réponses »*
- *Toute application numérique manquant l'unité ne sera pas comptée*

Les pages 5/6 et 6/6 sont des fiches des réponses à rendre.

Exercice 1.

Soit un ascenseur de masse M, destiné à soulever une charge dont la masse maximale est notée m. Son mouvement vers le haut est freiné par une force de frottement $\vec{f}$, supposée constante. On désigne par T la force de traction, développée par le moteur de l'ascenseur pour faire monter la charge. Soit v la vitesse de montée du système (ascenseur+charge). On donne : $M = 1000\,Kg$, $m = 800\,Kg$, $f = 4000\,N$, $g = 10\,m/s^2$.

1. Exprimer la force de traction T nécessaire au soulèvement du système à une vitesse constante en fonction de M, m, g et f. Calculer la puissance P_1 que doit fournir le moteur pour $v = 3\,m/s$.
2. Exprimer la puissance P_2 que doit fournir le moteur pour réaliser une accélération constante de module γ vers le haut en fonction de M, m, g, γ, f et la vitesse instantanée v (on néglige l'inertie du moteur). Calculer cette puissance à l'instant $t = 2\ s$ si le départ était à vitesse nulle et $\gamma = 0.8\,m/s^2$.
3. Le câble de traction (de masse négligeable) de l'ascenseur s'enroule sur le moteur au moyen d'un tambour de rayon R, le tambour a une inertie J par rapport à son axe (Fig.1). A un moment donné, le tambour se trouve sans liaison avec le moteur et le système est alors en chute libre. Trouver l'accélération γ du système en fonction de M, m, J, R, g et f.
4. Calculer la distance parcourue pour une durée d'une seconde, en négligeant le moment d'inertie J du tambour, (indication : le frottement est toujours existant (force $f = 4000\ N$) et vitesse initiale nulle).

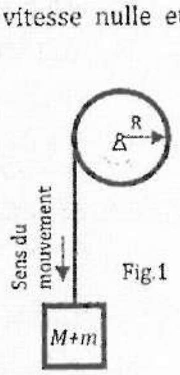


Fig.1

Exercice 2.

Soit une bille de masse m, en chute au sein d'un fluide (Fig.2), dans le champ de pesanteur uniforme d'accélération $\vec{g} = -g\vec{z}$, lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h. La bille est assimilée à un point matériel (son volume est nul), sa position est repérée par la cote $z(t)$ relativement à l'axe vertical ascendant (Oz) du repère galiléen $R(Oxyz)$, ses coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont constamment nulles.

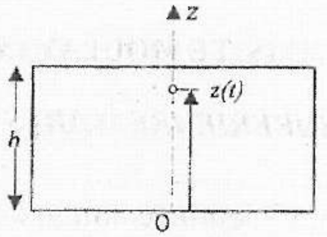


Fig. 2

Cas I : La poussée d'Archimède et le frottement du fluide sont négligés.

5. Exprimer l'accélération γ de la bille en fonction de g. En utilisant les conditions initiales, déterminer l'équation horaire $z(t)$ du mouvement de la bille.

Cas II : La poussée d'Archimède est toujours négligée, mais le frottement du fluide n'est plus négligé et il est représenté par une force telle que $\vec{f}=-\alpha\vec{v}$ agissant sur la bille ; $\vec{v}$ étant le vecteur vitesse instantanée de la bille et α est une constante positive.

6. Etablir l'équation différentielle du mouvement de la bille.
7. On admet que la vitesse peut se mettre sous la forme $v(t)=\frac{-mg}{\alpha}+A\ e^{-t/\tau}$, où A et τ sont des constantes à identifier : déterminer A et τ en fonction de m, g et α.
8. déterminer la position $z(t)$ de la bille en fonction de m, α, g, h et le temps t.

Exercice 3.

On considère un pendule pesant constitué d'une plaque homogène de forme carrée, de côté $2b$, de centre de gravité G, de masse m, située dans le champ de pesanteur d'accélération g suivant l'axe vertical (Ox) ; elle est suspendue au milieu de l'un de ses côtés (fig.3) et réalise, dans le repère galiléen $R(Oxyz)$, des oscillations autour de sa position d'équilibre, sans frottement. Pour une position quelconque, la plaque est repérée par l'angle θ que forme la droite (OG) avec la verticale. On donne le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe (Oz) : $J=\frac{5mb^2}{3}$.

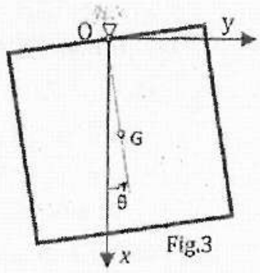


Fig.3

9. Exprimer l'énergie potentielle E_p de la plaque, en fonction de m, g, b et θ. On prendra $E_p=0$ pour $\theta=0$.
10. Exprimer son énergie cinétique E_c et son énergie mécanique E_m, en fonction de b, m, g, θ et $\dot{\theta}$.
11. Si à l'instant initial, la plaque est lâchée sans vitesse initiale à partir de l'angle θ_m, déterminer la vitesse maximale v_{max} de son centre de masse en fonction de b, g et θ_m.
12. En utilisant la loi de conservation de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle du mouvement de la plaque.

Dans la suite, on considère les petites oscillations de la plaque, on rappelle que $\cos^2\theta\approx 1-\theta^2/2$ et $\sin\theta\approx\theta$ pour θ petit. On donne pour les applications numériques : $\theta_m=\pi/20$, $b=0.1\text{m}$ et $g=10\ \text{m/s}^2$.

13. Calculer la période T du mouvement de la plaque autour de sa position d'équilibre. Déterminer l'équation horaire du mouvement de la plaque (avec application numérique).
14. Exprimer puis calculer les composantes γ_x et γ_y de l'accélération du cendre de gravité G, à l'instant $t=T/4$.
15. Exprimer puis calculer les composantes R_x et R_y de la force du support sur la plaque au poit O, à l'instant $t=T/4$.

Exercice 4.

Le montage ci-contre comporte un générateur idéal de force électromotrice constante E =24V, deux condensateurs de capacités respectives : $C_1 = 10\ \mu F$ et $C_2 = 150\ \mu F$ et une bobine d'inductance L.

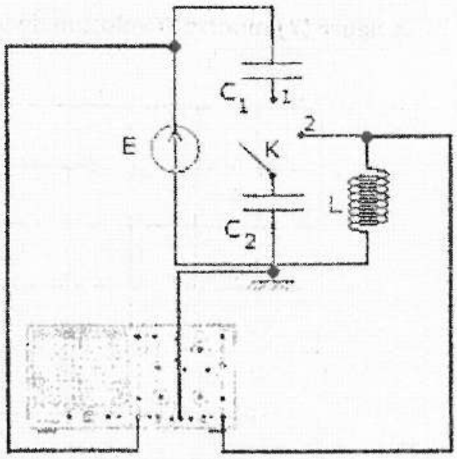


Fig.4

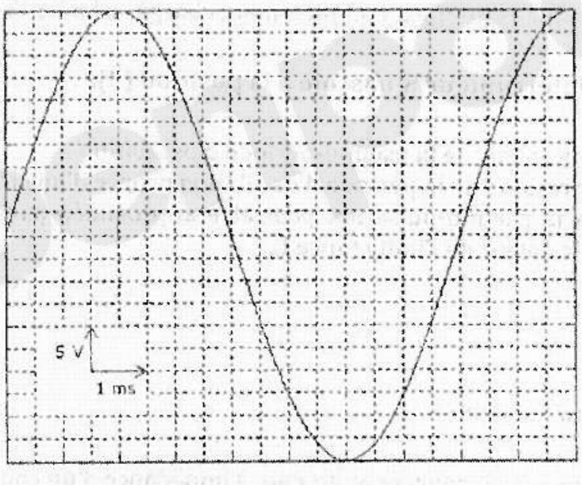
L'interrupteur k est en position (1).

16. Donner l'expression de la capacité équivalente C des deux capacités C_1 et C_2.
17. Calculer sa valeur numérique.
18. Donner l'expression de la tension aux bornes de la capacité C_2 lorsque les deux condensateurs sont complètement chargés.
19. Calculer sa valeur numérique.
20. Donner l'expression de la charge électrique Q_2 du condensateur C_2.

L'interrupteur k est en position (2).

La figure (5) illustre la tension aux bornes de la bobine L.

Fig.5



21. Donner l'équation différentielle vérifiée par cette tension qu'on note $u_L(t)$.
22. Donner l'expression de la tension $u_L(t)$.
23. Donner l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de L et C_2.
24. Calculer sa valeur numérique.
25. Déduire la valeur de l'inductance L.

Exercice 5.

Le montage ci-contre comporte un générateur idéal de force électromotrice constante E =15V, deux résistances R_1 et R_2, un condensateur de capacité C = 42 μF et une bobine d'inductance L.

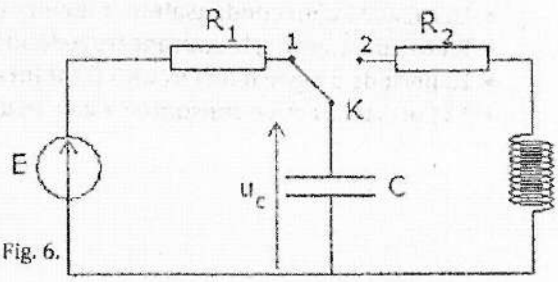


Fig. 6.

La figure (7) montre l'évolution de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur.

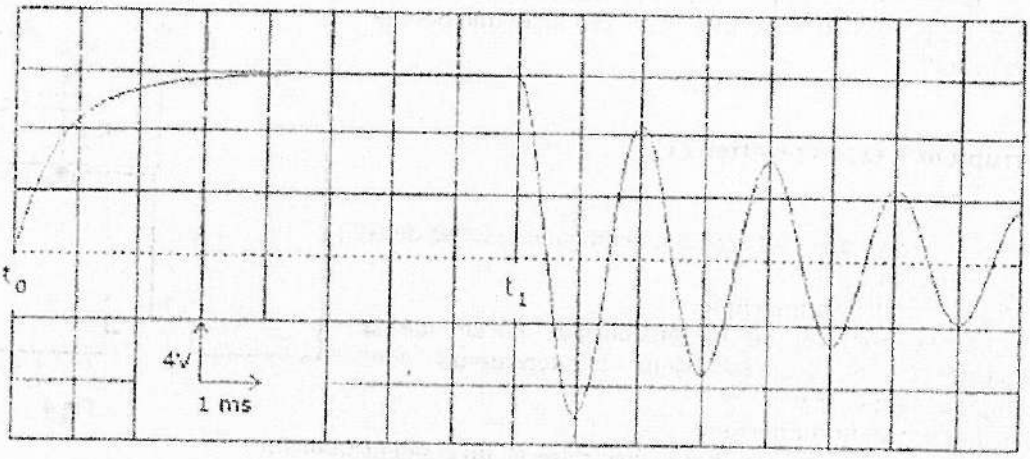


Fig. 7.

A l'instant t_0, l'interrupteur K est en position (1).

26. La constante du temps du circuit RC étant égale à 0.9 ms. Quelle est la valeur de la résistance R_1 ?
27. Une fois le condensateur est complètement chargé, calculer l'énergie qui y est emmagasinée.

A l'instant t_1, l'interrupteur K bascule à la position (2).

28. Déterminer la valeur de la pseudo-période d'oscillation.
29. Donner l'expression de la période d'oscillation propre d'un circuit LC.
30. Sachant que la pseudo-pulsation peut être approximée par la pulsation propre d'un circuit LC, déterminer la valeur de l'inductance L.

Exercice 6.

Répondre par vrai ou faux.

- Quand la fréquence du courant augmente, l'impédance d'un condensateur augmente.
- Quand la fréquence du courant augmente, l'impédance d'une bobine augmente.
- La valeur efficace d'une tension sinusoïdale de valeur maximale 5V est égale à 3.53V.
- La valeur maximale du déphasage entre deux tensions sinusoïdales est égale à π rad.
- La capacité équivalente de deux condensateurs en série est toujours de valeur plus faible que la plus faible des deux capacités.
- La résistance équivalente de deux résistances en parallèle est toujours de valeur plus faible que la plus faible des deux résistances.
- La capacité d'un condensateur augment d'autant plus que l'épaisseur de son diélectrique est faible.
- En régime continu, le courant traversant un condensateur est toujours nul.
- La période propre d'un circuit LC est inversement proportionnelle à la capacité.
- La puissance active consommée par un dipôle est toujours supérieure à la puissance apparente.

Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne Réponses	(NB : Chaque question est notée sur **(1Pt)**)
Questions	**Réponses**
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (a) Toute application injective d'un ensemble dans lui même est bijective (b) $\forall x > 1, \dfrac{x-1}{\ln(x-1)} \in \mathbb{R}$ (c) Soit A, B et C trois ensembles, on a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ (d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$ (e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel	a) fausse. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ est injective mais pas bijective, 0 n'a pas d'antécédant dans $\mathbb{R}$. b) fausse. $D_{\frac{x-1}{\ln(x-1)}} =]1,2[\cup]2,+\infty[$ c) fausse. $A = B = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}^+$ $(A \cup B) \cap C = \mathbb{R}^+$ $A \cup (B \cap C) = \mathbb{R}$ d) vraie e) fausse, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme qui est nulle n'est pas irrationnel.
Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes : (a) La fonction f est constante sur $[0, 5]$ (b) La fonction g n'est pas injective sur l'ensemble E (c) La fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ (d) Tout réel possède une racine carré dans $\mathbb{R}$ (e) Etant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe	1. La proposition se traduit par: $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,5] : f(x) = K$ 2. La proposition se traduit par: $\exists (a,b) \in E^2 / g(a) = g(b)$ et $a \neq b$ 3. La proposition se traduit par: $\forall x \in \mathbb{R}$ $h(x) \in \mathbb{N}$ 4. La proposition se traduit par: $\forall b \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R} / b = a^2$ 5. La proposition se traduit par: $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / ab \geqslant 0$ ou $bc \geqslant 0$ ou $ac \geqslant 0$

Questions à réponse précise, Partie III

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (**2Pts**))

Questions	Réponses
Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$	$S = \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lvert E(x)\rvert = 3$ avec $E(x)$ est la partie entière de x	$S =]-4, -3] \cup [3, 4[$
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x}}$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 - e^x}$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f(x) = x \ln\lvert x+1\rvert$	
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x}\,dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} avec $n > 1$	$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$
Soit la fonction f définie sur $I = [0, 3]$ par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in]0, 2[\\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in]2, 3] \end{cases}$ Calculer $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ avec $x \in I$	$F(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{2} + \ln \frac{1+x^2}{5}$
Calculer $\int t^3 \cos t^2\, dt$	$\int t^3 \cos(t^2)\,dt = \frac{1}{2}t^2\sin(t^2) + \frac{1}{2}\cos(t^2) + K$
Déterminer la fonction f telle que $gof(x) = 2\lvert x\rvert$ sachant que g est la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \ln(2\lvert x\rvert) & x \in]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[\\ 4x^2 - 1\ ; & x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[\end{cases}$
Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0, 1]$?	$\beta \in [0, 2]$

Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))

Questions	Réponses
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(x^2) = (x^2+1)P(x)$	$\mathcal{E} = \{a(x^2-1) / a \in \mathbb{R}\}$
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $198x+216y = 36$	$S = \{(-2+12k, 2-11k) / k \in \mathbb{Z}\}$
E, F et G étant trois ensembles finis exprimer $card(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles E, F, G, $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	$Card(E \cup F \cup G) = Card(E) + Card(F) + Card(G) - Card(E \cap F) - Card(E \cap G) - Card(F \cap G) + Card(E \cap F \cap G)$
Exprimer à l'aide d'intervalles de $\mathbb{R}$ l'ensemble suivant : $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq \|x\| < 4\}$	$A = [2,4] \cup [-4,-2]$
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples +, −, * et /	$6 \div (1 - 5 \div 7) = 6 \div \frac{2}{7} = 21$
Calculer le nombre complexe $B = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$	$B = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]^{24} = \left[2^{12}, 14\pi\right] = 2^{12} = 4096$
Calculer $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	$a = \frac{2}{15}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{27}{10}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$
Calculer $\beta = \sum_{k=1}^{n} (2k+7)$	$\beta = \sum_{k=1}^{n} (2k+7) = n(n+8)$
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on contidère les points A, B et C de coordonnées : $A(2,4)$, $B(-2,1)$ et $C(4,3)$. On note d la distance du point A à la droite (BC). Donner la valeur de d.	$d = d(A,(BC)) = \frac{\|2-12+5\|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
Calculer la limite de la suite dont le terme général est donné par : $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$	$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$