Correction du concours d'ENSA 2023

Q.1) $6 \xrightarrow[-2]{} 4 \xrightarrow[\times 2]{} 8 \xrightarrow[-3]{} 5 \xrightarrow[\times 3]{} 15 \xrightarrow[-4]{} 11 \xrightarrow[\times 4]{} 44$

(C)

Q.2) supposons que $x = abcdef$ (avec a,b,c,d,e,f le chiffres du nombre x)

puisque x est divisible par 9, alors $a+b+c+d+e$ est divisible par 9

donc $f+a+b+c+d+e$ est divisible par 9

d'où $y = fabcde$ est divisible par 9 (A) le reste de y par 9 est 0.

n est divisible par 9 $\Leftrightarrow$ la somme des chiffres de n est divisible par 9.

Q.3) On a $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

donc le nombre de diviseurs de 150 est $(1+1)(1+1)(2+1) = 12$

Les diviseurs sont : $D_{150} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150\}$

* les couples d'entiers naturels premiers entre eux dont le produit vaut 150

sont $(1,150)$; $(150,1)$; $(2,75)$; $(75,2)$; $(3,50)$; $(50,3)$; $(6,25)$; $(25,6)$

donc il y a 8 couples d'entiers naturels.

* les couples d'entiers relatifs premiers entre eux dont le produit vaut 150

sont
$$\left.\begin{array}{l}(1,150);\ (150,1);\ (-1,-150);\ (-150,-1)\\ (2,75);\ (75,2);\ (-2,-75);\ (-75,-2)\\ (3,50);\ (50,3);\ (-3,-50);\ (-50,-3)\\ (6,25);\ (25,6);\ (-6,-25);\ (-25,-6)\end{array}\right\}$$
il y a 16 couples d'entiers

Q.4) $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3(3x^5 - 4x^4 + 2x)}_{\text{divisible par } 3} = 5$

n'est pas divisible par 3

donc l'équation n'admet pas de solution entière

(D)

Q.5) On a $U_{n^2+2n} = \sqrt{n^2+2n} - [\sqrt{n^2+2n}]$

puisque $(\forall n \in \mathbb{N})$ $n^2 \leq n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$

alors $(\forall n \in \mathbb{N})$ $n \leq \sqrt{n^2+2n} < n+1$ d'où $[\sqrt{n^2+2n}] = n$

$$\lim_{n \to +\infty} U_{n^2+2n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+2n} - n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 1$$ (B)

Q.6) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\sin(e^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$ (B)

$t = e^{-x}$; $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0^+$

Q.7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x^2+x-1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \times \cos(x^2+x-1) = 0$ (A)

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $(\forall x\in\mathbb{R})\ -1 \leq \cos(x^2+x-1) \leq 1$

Q.8) Supposons que f n'est pas constante, donc $(\exists n_1, n_2 \in \mathbb{Z})(\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ tel que $f(x_1) = n_1$ et $f(x_2) = n_2$ et $n_1 \neq n_2$

puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f doit prendre toutes les valeurs réels comprises entre n_1 et n_2. ce qui est absurde !!

d'où f est constante. (B)

Q.9) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)\left(1-f(x)f(y)\right) = f(x)+f(y)$

1er méthode :

1) On remarque que la fonction constante nulle vérifie les conditions, donc $(\forall x\in\mathbb{R})\ \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = 0$ et $f'(0) = 0$ alors (A) est le choix correct.

2) On remarque aussi que la fonction $x \mapsto \tan x$ verifie les conditions pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\ \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = \dfrac{1+\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = 1$

et puisque $f'(0) = 1+\tan^2(0) = 1$, alors (A) est le choix correct.

Q.10) $I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ posons $x = \frac{1}{t}$ donc $dx = \frac{-1}{t^2}\,dt$

on a $x = a \Rightarrow t = \frac{1}{a}$ et $x = \frac{1}{a} \Rightarrow t = a$

donc $I = \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(\frac{1}{t})}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} \times \frac{-1}{t^2}\,dt = \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{-\ln(t)\times(-1)}{\frac{t^2+1}{\cancel{t^2}}\times \cancel{t^2}}\,dt$

$= \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$

$= -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$

$I = -I$ donc $I = 0$ (C)

Q.11) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2(x)\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2(x)\,dx$

On a $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$ (1)

Et $J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x)\,dx$ (car $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$)

$= \left[\frac{x^2 \sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x)\,dx$ $\quad u = x^2 \quad u' = 2x \quad v' = \cos(2x) \quad v = \frac{\sin(2x)}{2}$

$= \frac{\pi^2}{8}\sin(\pi) - \left(\left[-\frac{x\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,dx\right)$ $\quad u = x \quad u' = 1 \quad v' = \sin(2x) \quad v = \frac{-\cos(2x)}{2}$

$= -\left(-\frac{\pi}{4}\cos(\pi) + \frac{1}{4}\left[\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$= -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin(\pi) = -\frac{\pi}{4}$ (2)

(1) − (2) $\Rightarrow I + J - (J - I) = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2I = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$ (D)

Q.12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{1445} \times \sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{1445} \times (\cos x)'\,dx$

$= -\left[\frac{(\cos x)^{1446}}{1446}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{(\cos 0)^{1446}}{1446} = \frac{1}{1446}$ (C)

Q.13) $z^2 - 4iz - 4(1+i) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2\times z\times 2i + (2i)^2 - 4i = 0$ $\quad (1+i)^2 = 2i$

$\Leftrightarrow (z - 2i)^2 - 2(1+i)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(z - 2i - \sqrt{2}(1+i)\right)\left(z - 2i + \sqrt{2}(1+i)\right) = 0$

donc $z_1 = 2i + \sqrt{2}(1+i) = \sqrt{2} + i(2+\sqrt{2})$ et $z_2 = 2i - \sqrt{2}(1+i) = -\sqrt{2} + i(2-\sqrt{2})$

d'où $\text{Im}(z_1) + \text{Im}(z_2) = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ (B)

Q.14) $(1+i)^{2000} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2000} = (\sqrt{2})^{2000}\, e^{i\frac{2000\pi}{4}}$

$= 2^{1000} \times e^{i500\pi}$

$= 4^{500} \times e^{i0}$ $\qquad e^{i2k\pi} = e^{i0} = 1$

$= 4^{500}$ (C)

Q.15) $\left(\dfrac{7-15i}{15+7i}\right)^{2023} = \left(\dfrac{-7i^2-15i}{15+7i}\right)^{2023} = \left(\dfrac{-i\cancel{(15+7i)}}{\cancel{15+7i}}\right)^{2023} = (-i)^{2023}$

$(-i)^{2023} = -i^{2023} = -i \times i^{2022} = -i \times (i^2)^{1011} = -i \times (-1)^{1011}$

$= -i \times (-1) = i$ (A)

Q.16) $\left(1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}\right)^{1000} = \left(1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4\right)^{1000}$

$1+a+a^2+a^3+\dots+a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $\qquad = \left(\dfrac{\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5-1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1}\right)^{1000} = \left(\dfrac{e^{i2\pi}-1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1}\right)^{1000}$ $\quad e^{i2k\pi}=1$

$= \left(\dfrac{1-1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1}\right)^{1000} = 0$ (A)

Q.17) $y''-7y'+12y=0$ l'équation caractéristique est $r^2-7r+12=0$

$\Delta = 49-48 = 1 > 0$ donc $r_1 = \dfrac{7-1}{2} = 3$ et $r_2 = \dfrac{7+1}{2} = 4$

d'où $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ $f(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{4x}$ (C) est le choix correct !!

Démonstration : $f(0) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha$

$f'(0) = 1 \Rightarrow 3\alpha + 4\beta = 1 \Rightarrow 3\alpha - 4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -1$

$\Rightarrow \beta = 1$

d'où $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) = -e^{3x} + e^{4x}$ (C)

Q.18) $A(1,0,2)$ et $(P) : 2x+y+z+4=0$ donc $d_A = \dfrac{|2+0+2+4|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}}$

$B(3,2,1)$ et $(Q) : -x+5y-4z-5=0$ donc $d_B = \dfrac{|-3+10-4-5|}{\sqrt{1+25+16}} = \dfrac{2}{\sqrt{42}}$

d'où $d_A \times d_B = \dfrac{16}{\sqrt{6}\times\sqrt{6\times 7}} = \dfrac{16}{6\sqrt{7}} = \dfrac{8}{3\sqrt{7}}$ (A)

Q.19) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^2}{2}$

pour trouver l'aire sous $(\mathcal{C}_f)$ et au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$

il faut déterminer l'intervalle où $(\mathcal{C}_f)$ est au dessous de $(\mathcal{C}_g)$

$$f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} \geqslant \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^2(1+x^2) \leqslant 2 \Leftrightarrow x^4 - 1 + x^2 - 1 \leq 0$$

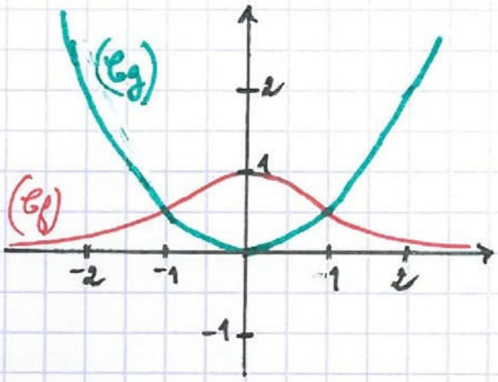
$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow |x| \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leqslant 1$$

donc l'aire demandée est $\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx$



$$= \left[\arctan(x) - \frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\right)$$

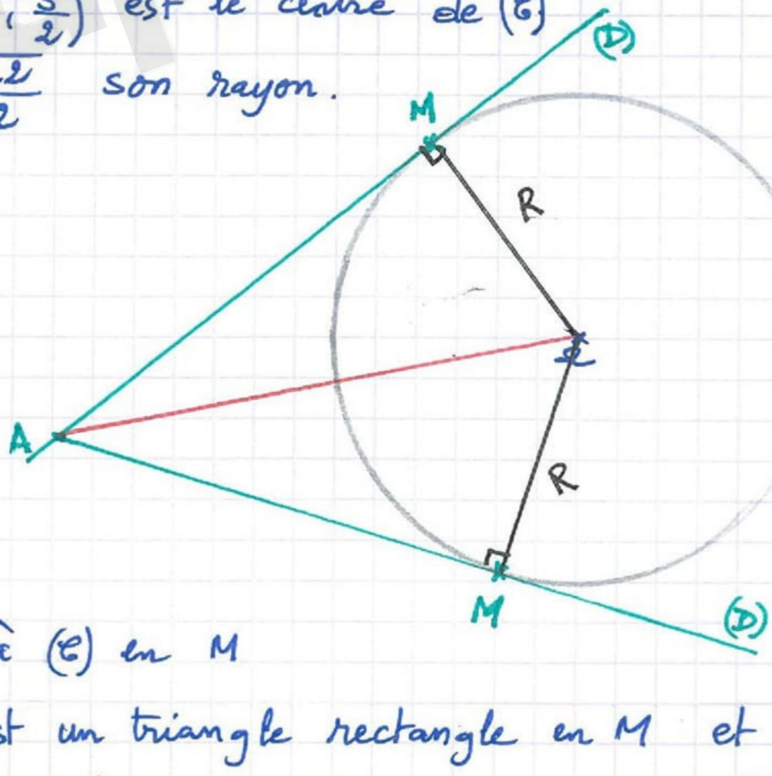
$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \quad (B)$$

Q.20) $x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$ et $A(1, -2)$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{22}{4}$$

donc $\Omega\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ est le centre de $(\mathcal{C})$

et $R = \frac{\sqrt{22}}{2}$ son rayon.



(AM) tangent à $(\mathcal{C})$ en M

donc ΩAM est un triangle rectangle en M et $\Omega M = R$

d'après le théorème de Pythagore $AM = \sqrt{\Omega A^2 - R^2}$

c-à-d $AM = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{22}{4}} = \sqrt{\frac{9+49-22}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3 \quad (C)$

$2^{\text{ème}}$ méthode :

On remarque que tous les choix sont constantes

donc la fonction $g(x) = \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$ est constante sur $\mathbb{R}$

c-à-d $(\forall x \in \mathbb{R})$ $g(x) = g(0) = \dfrac{f'(0)}{1+f(0)^2}$

On calcule $f(0)$:

puisque $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$ $f(x+y)\left(1 - f(x)f(y)\right) = f(x) + f(y)$

alors pour $x = y = 0$ on trouve $f(0)\left(1 - f(0)^2\right) = 2f(0)$

$$\Rightarrow f(0) + f(0)^3 = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \text{ ou } f(0)^2 = -1$$

impossible

donc $f(0) = 0$, d'où $(\forall x \in \mathbb{R})$ $g(x) = f'(0)$ (A)

$3^{\text{ème}}$ méthode :

supposons qu'il existe deux réels α et β tels que $f(\alpha)\times f(\beta) = 1$

donc $f(\alpha+\beta)\underbrace{\left(1 - f(\alpha)\times f(\beta)\right)}_{0} = f(\alpha) + f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) + f(\beta) = \Rightarrow f(\beta) = -f(\alpha)$

d'où $f(\alpha)\times(-f(\alpha)) = 1 \Rightarrow -f(\alpha)^2 = 1$ impossible

et alors $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ $f(x)\times f(y) \neq 1$

donc il n'existe aucune nombre d'image 1 ou -1 par f.

f dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$

et comme $f(0) = 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) \neq \pm 1$ alors $(\forall x \in \mathbb{R})$ $-1 < f(x) < 1$

et on a $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ $\arctan(f(x+y)) = \arctan\left(\dfrac{f(x)+f(y)}{1 - f(x)\times f(y)}\right)$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad \arctan(f(x+y)) = \arctan(f(x)) + \arctan(f(y))$$

$(\forall xy < 1)$ $\arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan(x) + \arctan(y)$ une relation classique d'arctan

On fixe y donc $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\dfrac{f'(x+y)}{1+f(x+y)^2} = \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

pour tout valeur de x, on prend $y = -x$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = \dfrac{f'(0)}{1+f(0)^2} = f'(0)$ (car $f(0) = 0$)

(A)

MATH

	A	B	C	D
Q.01			✓	
Q.02	✓			
Q.03			✓	
Q.04				✓
Q.05		✓		
Q.06		✓		
Q.07	✓			
Q.08		✓		
Q.09	✓			
Q.10			✓	
Q.11				✓
Q.12			✓	
Q.13		✓		
Q.14			✓	
Q.15	✓			
Q.16	✓			
Q.17			✓	
Q.18	✓			
Q.19		✓		
Q.20			✓	