Q1. Sachant que $11\times11 = 121$, le produit $111111111 \times 111111111$ est égal à :

A) 1234567654321	B) 123456787654321	C) 12345678987654321	D) 1234568654321
×	×		×

$11\times11 = 121$. $111\times111 = 12\underset{\llcorner\!\lrcorner}{3}21$

$1111\times1111 = 123\underset{\llcorner\!\lrcorner}{4}321$

12345678987654321

C

Q2. Le nombre de diviseurs positifs du nombre 546×840 est :

A) 180	B) 181	C) 182	D) 183

$546 = 2\times3\times7\times13$ et $840 = 2^3\times3\times5\times7$

$546\times840 = 2^4\times3^2\times5\times7^2\times13$

Nombre de diviseurs :

$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(2+1)\times(1+1)$

$5\times3\times2\times3\times2 = 180$

A

Q3. Soit $f : IR \to IR$. La négation de la proposition « f est la fonction nulle » est :

A) $\forall x \in IR,\ f(x) > 0$	B) $\forall x \in IR,\ f(x) \neq 0$	C) $\forall x \in IR,\ f(x) = 0$	D) $\exists x \in IR,\ f(x) \neq 0$

f est la fonction nulle sur $IR \iff (\forall x \in IR)\ f(x) = 0$

La négation : $(\exists x \in IR)\ f(x) \neq 0$

D

1

Q4. La solution de l'équation à variable réelle x : $\ln(x^2-1) - \ln(2x-1) + \ln 2 = 0$ est :

A) $\frac{1+7\sqrt{3}}{2}$	B) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	C) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	D) $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

$x \in D_E \Leftrightarrow x^2-1>0$ et $2x-1>0$

$\Leftrightarrow (x>1$ ou $x<-1)$ et $x>\frac{1}{2}$.

$D_E =]1,+\infty[$.

Equation $\ln\left(\frac{x^2-1}{2x-1}\right) = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0$

$\Delta = 12$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \notin D_E$ $\quad x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \in D_E$

B

Q5. La valeur maximale des termes $u_k = C_{22}^k\ 20^{22-k}\ 21^k$ dans le développement du nombre $(20+21)^{22}$ pa[r] formule du Binôme de Newton est atteinte pour k égal à :

A) 8	B) 9	C) 10	D) 11

$K = 11.$

$(4+5)^4 = 256 + 1280 + \boxed{2400} + 2000 + 625$

$k=2.$

2

Q6.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} =$$

A) 1	B) 0	C) $+\infty$	D) e

$\sqrt[n]{n^2} = n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n} \ln n} = e^{2 \frac{\ln n}{n}}.$

donc $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} = e^0 = 1.$

A

Q7.

$$\lim_{n \to +\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)} =$$

A) 0	B) -6	C) 6	D) $+\infty$

$\lim_{n \to +\infty} \left(n - \sqrt{n^2+12n+35}\right)$

$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2+12n+35}$

$= \dfrac{0-12}{2\sqrt{1}} = -6$

Q8.
Soient a et b deux réels; la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & si\ x > 0 \\ ax + b & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

est continue en 0 ssi

A) $a \in IR$ et $b = 2$	B) $a = 0$ et $b = 1$	C) $a = \frac{-1}{3}$ et $b = \frac{1}{2}$	D) $a \in IR$ et $b = \frac{-1}{2}$

$f(0) = b$ $\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x - \frac{x^2}{2} - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}.$

$b = -\dfrac{1}{2}.$

$a \in \mathbb{R}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$

D

Q9.

La dérivée de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\ \sqrt{(x+3)^3}}$ est :

$A)\ \frac{5x^2-x-12}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$B)\ \frac{3x^2+x-24}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$C)\ \frac{2x^2+x-24}{2\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$D)\ \frac{5x^2+x-24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

$$f'(x) = \left(\frac{(x-1)^{\frac12}}{(x+2)^{\frac23} \times (x+3)^{\frac32}}\right)'$$

$$= \frac{\frac12 (x-1)^{-\frac12}(x+2)^{\frac23}(x+3)^{\frac32} - (x-1)^{\frac12} \times \frac23 (x+2)^{-\frac13}(x+3)^{\frac32} - (x-1)^{\frac12}\times(x+2)^{\frac23}\times\left(\frac32\right)(x+3)^{\frac12}}{(x+2)^{\frac43} \times (x+3)^3}$$

$\times 6$

$$= \frac{3\,\cancel{X^{-\frac12}}\,Y^{\frac23}\times Z^{\frac32} - 4X^{\frac12}\,\cancel{Y^{-\frac13}}\times Z^{\frac32} - 9X^{\frac12}Y^{\frac23}\times Z^{\frac12}}{6\qquad Y^{\frac43}\times Z^3}$$

$\times 6$

$$= \frac{3\times Y\times Z - 4X\times Z - 9X\cancel{Y}}{6\,\cancel{Y}\,X^{\frac12}\times Y^{\frac53}\times Z^{\frac52}} \qquad \frac{\cancel{X}^{\frac12}\times Z^{-\frac12}\times Y^{\frac13}}{X^{\frac12}\times Z^{-\frac12}\times Y^{\frac13}}$$

$3(x+2)(x+3) - 4(x-1)(x+3) - 9(x-1)(x+2)$

$3(x^2+5x+6) - 4(x^2+2x-3) - 9(x^2+x-2)$

$3x^2+15x+18 - 4x^2 - 8x + 12 - 9x^2 - 9x + 18$

$$\frac{-10x^2-2x+48}{6\ X^{\frac12}\ Y^{\frac53}\times Z^{\frac52}}$$

$$\frac{-5x^2-x+24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$$

La bonne réponse n'est pas proposée. ?!

Q10. Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $f(x) = xe^x$. L'équation de la tangente à la courbe f^{-1} au point d'abscisse e est :

A) $y = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$	B) $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2}$	C) $y = \frac{1}{2e}x + 1$	D) $y = \frac{1}{e}x - 1$

$f(1) = 1e^1 = e$. donc $f^{-1}(e) = 1$

$f'(x) = e^x + xe^x$

$f'(1) = e + e = 2e$.

$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(f^{-1}(e))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e}$.

L'équation de la tangente est :

$y = (f^{-1})'(e)(x-e) + f^{-1}(e)$

$= \frac{1}{2e}(x-e) + 1$

$= \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2} + 1$

$\boxed{y = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}}$

A

Q11.

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx =$$

A) $\frac{\pi}{2} + 1$	B) $\frac{\pi}{2} - 1$	C) $-1 + \frac{\pi}{4}$	D) $-1 - \frac{\pi}{4}$

$\frac{1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2+1-2}{x^2+1} = -\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) = -1 + \frac{2}{x^2+1}$

$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}dx = \left[-x + 2\,\mathrm{Arctan}\,x\right]_0^1 = -1 + 2\times\frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$

B

Q12. Soit l'intégrale

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \, dx$$

La valeur de I_4 est:

A) $\frac{252}{315}$	B) $\frac{254}{315}$	C) $\frac{258}{315}$	D) $\boxed{\frac{256}{315}}$

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2k}$$

$$\int (x^2-1)^n dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \int_0 x^{2k} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left[\frac{1}{2k+1} x^{2k+1}\right]$$

$$I_4 = C_4^0 [x]_{-1}^{1} - C_4^1 \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} + C_4^2 \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} - C_4^3 \left[\frac{1}{7}x^7\right]_{-1}^{1} + C_4^4 \left[\frac{1}{9}x^9\right]_{-1}^{1}$$

$$= 2 - 4 \times \frac{2}{3} + 6 \frac{2}{5} - 4 \frac{2}{7} + \frac{2}{9}$$

$$= 2 - \frac{8}{3} + \frac{12}{5} - \frac{8}{7} + \frac{2}{9}$$

$$= \frac{256}{315}$$

<u>Sinon</u> $$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times I_{n-1}$$

$$\boxed{I_0 = 2}$$

$$I_4 = \frac{8}{9} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 2$$

$$= \frac{256}{315}$$

D

6

Q13. $\cos(\pi/16)$ est égal à :			
A) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	B) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	C) $\frac{1}{16}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	D) $\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

on a $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

$$\cos^2\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$ D

Q14. La formule algébrique du nombre complexe $\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$ est :			
$\boxed{\text{A) } \frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}$	B) $-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$	C) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}$	D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023} = \left[1,\frac{\pi}{3}\right]^{2023} = \left[1,\frac{2023\pi}{3}\right]$$

$$= \left[1, 337\times 2\pi+\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \left[1,\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ A

17. La solution $y(x)$ de l'équation différentielle suivante: $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$, $y(0) = -4$; $y'(0) = 6$

t :

$e^{\frac{x}{2}}(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right))$	B) $e^{\frac{x}{2}}(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$	C) $e^{\frac{-x}{2}}(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right))$	$\boxed{\text{D) } e^{\frac{-x}{2}}(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right))}$

$2y'' + 2y' + 5y = 0$.

$2t^2 + 2t + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -36$

$t_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \quad t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(\alpha\cos\frac{3}{2}x + \beta\sin\frac{3}{2}x\right) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$y(0) = -4 \Rightarrow \alpha = -4$

$y'(0) = 6 \Rightarrow \beta = \frac{8}{3}$

D

Q18.
Dans un repère orthonormé, on considère le plan P d'équation cartésienne $2x - y - 2z + 2 = 0$, et la sphère d'équation $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$. Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan P est :

$\boxed{\text{A) } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases}, t \in IR}$	B) $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 2t \end{cases}, t \in IR$	C) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases}, t \in IR$	D) $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases}, t \in IR$

Vecteur normal $\vec{n}(2, -1, -2)$

centre de la sphère $\Omega(3, 0, -5)$

Bonne réponse A

Q15.
Soit le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$, alors z^5 est égal à :

A) $\bar{z}$	B) $-8\bar{z}$	$\boxed{\text{C) } -16\bar{z}}$	D) $16\bar{z}$

$z^5 = (\sqrt{3} + i)^5 = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]^5 = \left[2^5, \frac{5\pi}{6}\right]$

$= 2^4 \times \left[2, \pi - \frac{\pi}{6}\right]$.

$= -2^4 \times \bar{z}$

$= -16\bar{z}$

C

Q19.
La première année du cycle préparatoire d'une ENSA comporte 300 élèves ingénieurs. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'Ecole selon la répartition suivante : 60 au club Cyber Sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60 % sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève-ingénieur(e) pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève ingénieur(e).

La probabilité que l'élève choisi(e) soit une fille est :

A) 0,4	*B*) 0,5	$\boxed{C)\ 0{,}6}$	*D*) 0,7

$180 \div 300 = 0{,}6$

C

	CS	Sport	Env	
G	42	36	42	120
F	18	54	108	180
	60	90	150	

Q20.
Sachant que l'élève choisi(e) est un garçon, la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A) 0,25	$\boxed{B)\ 0{,}35}$	*C*) 0,45	*D*) 0,55

$$P_G(\text{Env}) = \frac{P(\text{Env} \cap G)}{P(G)}$$

$$= \frac{42}{120} = 0{,}35$$

B