Corrigé du concours national commun d'accès aux Ecoles des Sciences Nationales Appliquées (ENSA) Juillet 2021



Fait par

Mr.EL ABBASSI Mohammed

Professeur de Mathématiques

Au lycée Ibn Abdoun- Khouribga

Epreuve de Maths

17 juillet 2021

Introduction

Chers élèves, Croyez-moi, un concours se prépare toute une année et non seulement pendant les derniers jours qui précèdent la date de ce concours. Il faut travailler à former une bonne culture mathématique, cumuler le maximum possible de connaissances : notions, formules, théorèmes, techniques et méthodes. L'épreuve de maths de cette année, comme celles des années précédentes exige une bonne compréhension du programme et beaucoup d'entrainement.
Enfin, je tiens à vous dire que dans un concours de courte durée c'est très rare de tout traiter, l'important c'est de travailler avec stratégie et méthode, savoir faire le bon choix de questions à traiter et sacrifier les autres..
Il ne reste plus qu'à vous souhaiter bonne chance et bon courage.

Mr.EL ABBASSI

Q1

Une condition necessaire(pas forcément suffisante) pour réussir de l'ENSA est ?

Réponse très évidente, pour réussir on doit nécessairement passer le concours, cette condition est évidement non suffisante.
D'où il fallait cocher la case $\boxed{D}$.

Q2

Le 17 juillet 2021, jour du concours de l'ENSA, est un samedi. Quel jour de la semaine sera le 29 février 2024 ?

Fraichement, il y a un algorithme qui nous permet de calculer le jour de la semaine pour n'importe quel date, le suivant concerne les dates après l'an 2000 : $r_j + r_a + r_m \equiv J\,[7]$ *, avec :*

r_j *: est le reste de la division euclidienne du jour du mois par 7.*

r_a *: est le reste de la division euclidienne du code de l'année par 7, ce code est égal aux deux derniers chiffres de l'année+le nombre d'années bissextiles depuis l'an 2000 (exclu).*

r_m *: est le code du mois. Voici le tableau des codes de chaque mois , qu'il faut connaître par cœur : .*

J : le code du jour qu'on cherche.

Mois	Code	Mois	Code
Janvier	6 (5 si l'année est bissextile)	Février	2 (1 si l'année est bissextile)
Mars	2	Avril	5
Mai	0	Juin	3
Juillet	5	Août	1
Septembre	4	Octobre	6
Novembre	2	Décembre	4

Nous voulons connaître le nom du jour du 29 février 2024

On a : $29 \equiv 1[7]$ *, donc* $r_j = 1$.

Comme 2024 est bissextile alors le code de l'année est 24+6=30, et comme

$30 \equiv 2[7]$*, alors* $r_a = 2$.

Comme 2024 est une année bissextile alors le code du mois de février est $r_m = 1$.

Donc : $r_j + r_a + r_m = 1+2+1 = 4$ *, et comme* $4 \equiv 4[7]$ *, alors* $J=4$

Et par suite le 29 février 2024 sera Jeudi .
D'où il fallait cocher la case $\boxed{B}$.
J=0 pour Dimanche – J=1 pour Lundi – J=2 pour Mardi- J=3 pour Mercredi – J=4 pour Jeudi- J=5 pour Vendredi et J=6 pour Samedi.

Q3 Le nombre de diviseur de $N=72^{10}\times 162^{50}$ est ?

Décomposons d'abord N en facteurs premiers, on obtient :

$$N=72^{10}\times 162^{50}=3^{220}\times 2^{80}$$

Donc le nombre des diviseurs de N est : $(220+1)\times(80+1)=221\times 81=17901.$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{D}$.

Q4

Soient x et y deux réels non nuls, inverse l'un de l'autre, tels que la somme du carrée de leur somme avec la somme de leurs carrés est égale à 10. Le carré du nombre x vaut ?

On a : $y=\dfrac{1}{x}$ *, et on a :* $(x+y)^2+x^2+y^2=10$ *, donc :*

$$\begin{aligned}(x+y)^2+x^2+y^2=10 &\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+x^2+\frac{1}{x^2}=10\\ &\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2+x^2+\frac{1}{x^2}=10\\ &\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{8}{2}=4\\ &\Leftrightarrow x^4-4x^2+4=3\\ &\Leftrightarrow (x^2-2)^2=3\\ &\Leftrightarrow x^2=2\pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{A}$.

Q5 $$\prod_{k=0}^{9}\sqrt[3\times 2^k]{5}=?$$

$$\prod_{k=0}^{9}\sqrt[3\times 2^k]{5}=\prod_{k=0}^{9}\sqrt[3]{5^{\frac{1}{2^k}}}=\sqrt[3]{\prod_{k=0}^{9}5^{\frac{1}{2^k}}}=\sqrt[3]{5^{\sum_{k=0}^{9}\frac{1}{2^k}}}=\sqrt[3]{5^{\sum_{k=0}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^k}}=\sqrt[3]{5^{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}}}$$

$$=\sqrt[3]{5^{\frac{2\left(2^{10}-1\right)}{2^{10}}}}=\sqrt[3]{5^{\frac{2046}{1024}}}=\sqrt[3]{5^{\frac{1023}{512}}}$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{C}$.

Q6

$$\lim_{x\to\infty} 3^n e^{-3n} = ?$$

On a : $\lim_{x\to\infty} 3^n e^{-3n} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{e^3}\right)^n = 0$ *, Car* $0 \langle \frac{3}{e^3} \langle 1$.

D'où il fallait cocher la case $\boxed{B}$.

Q7

Sachant que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$ *est un entier pair alors* $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right) = ?$

Posons $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n = 2k$ *, avec* $k \in \mathbf{N}$

Donc : $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2k\pi - \left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right) = -\lim_{n\to\infty} \sin\left(\left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right)$

Et comme $0 \langle 3-\sqrt{5} \langle 1$ *alors* $\lim_{n\to\infty}\left(3-\sqrt{5}\right)^n = 0$ *et comme la fct sin est continue en 0 alors* $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right) = 0$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{C}$.

Q8

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{x-\frac{\pi}{6}} = ?$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} 2\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}} = 2$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{C}$.

Q9

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln 3x}} = ?$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln 3x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln 3x}\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\frac{\ln 3}{\ln x}+1}} = e^1 = e$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{A}$

Q10

Sachant que f *est une fonction périodique de période* $T \rangle 0$ *sur* $\mathbf{R}$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbf{R}^*$ *alors?*

On a $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall n \in \mathbf{N})\ f(x+nT) = f(x)$, *comme* $x+nT$ *tend vers* $+\infty$ *quand* n *vers* $+\infty$ *et* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l \in \mathbf{R}^*$, *alors en fixant* x *dans* $\mathbf{R}$ *et en faisant tendre* n *vers* $+\infty$ *on obtient :* $\lim_{n\to+\infty} f(x+nT) = f(x)$ *et comme* $\lim_{n\to+\infty} f(x+nT) = l$ *alors* $f(x) = l$ *et comme* x *est quelconque dans* $\mathbf{R}$ *alors* f *est une constante non nulle.*

D'où il fallait cocher la case $\boxed{D}$.

Q11

f *la fonction définie par* $f(0)=0$ *et* $f(x) = x^2 + x^3\cos\frac{1}{x}$, *si* $x \neq 0$, $f'(0) = ?$

On a : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x + x^2\cos\frac{1}{x} = 0$, *car* $(\forall x \in \mathbf{R}^*)\ \left|x^2\cos\frac{1}{x}\right| \leq x^2$ *et* $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. *Donc* $f'(0) = 0$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{B}$.

Q12

$$f''(0)=?$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+} 2+3x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}$ *n'existe pas, car*

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ *et la fonction sinus n'admet pas de limite ni en* $+\infty$ *, ni en* $-\infty$.

D'où il fallait cocher la case $\boxed{D}$.

Q13

L'aire de la région délimitée par la courbe d'équation $y=\cos\ln x$ *et les droites d'équations* $x=e^{\frac{\pi}{2}}$ *et* $x=e^{\pi}$ *est égale?*

On a :

$$A=\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}}|\cos\ln x|dx=-\left(\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}}x'\cos\ln x\,dx\right)=-\left(\left[x\cos\ln x\right]_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}}+\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}}\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\sin\ln x\,dx\right)$$

$$=-e^{\pi}\cos\pi+e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}-\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}}x'\sin\ln x\,dx=e^{\pi}-\left[x\sin\ln x\right]_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}}+\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}}\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\cos\ln x\,dx$$

$$=e^{\pi}+e^{\frac{\pi}{2}}+\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}}\cos\ln x\,dx=e^{\pi}+e^{\frac{\pi}{2}}-A$$

Donc $A=\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{A}$.

Q14 $\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+f(x)}dx=?$

Considérons l'intégral $\int_0^{\alpha}\frac{1dx}{1+f(x)}$ *et faisant le changement de variable* $t=\alpha-x$

Donc :

$$\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+f(x)}dx=\int_{\alpha}^{0}\frac{1}{1+f(\alpha-t)}(-dt)=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\frac{1}{f(t)}}dt=$$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{f(t)}{1+f(t)}dt=\int_0^{\alpha}1-\frac{1}{1+f(t)}dt=\alpha-\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+f(t)}dt$$

D'où $\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+f(x)}dx=\frac{\alpha}{2}$.

D'où il fallait cocher la case $\boxed{A}$.

Q15 *Si* $f(x)=e^{-x}\sin x$ *alors* $f^{(4)}(x)=?$

On a , d'après la formule de Leibniz :

$$f^{(4)}(x)=\sum_{k=0}^{4}C_4^k\left(e^{-x}\right)^{(4-k)}\sin^{(k)}x$$

$$=e^{-x}\sin x\cancel{-4e^{-x}\cos x}-6e^{-x}\sin x+\cancel{4e^{-x}\cos x}+e^{-x}\sin x$$

$$=-4e^{-x}\sin x=-4f(x)$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{B}$.

Q16 $I=\int_0^{\alpha}e^{-x}\sin x dx=?$

On a :

$$I=\int_0^{\pi}e^{-x}(-\cos x)'dx=\left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-x}\cos x dx$$

$$=e^{-\pi}+1-\int_0^{\pi}e^{-x}\left(\sin x\right)'dx=e^{-\pi}+1-\left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x dx$$

Donc $2I=e^{-\pi}+1$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{D}$.

Q17

Sachant que u est la solution de l'équation $z\bar{z}+4iz=-3+4i$ alors?

Soit $x+iy$ *l'écriture algébrique de* u.

Donc :

$$\begin{aligned} u\bar{u}+4iu=-3+4i &\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4ix=-3+4i \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-4y=-3 \text{ et } x=1 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=2 \\ &\Rightarrow R_e(u)\times I_m(u)=2 \end{aligned}$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{A}$.

Q18

Sachant que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2-2\bar{z}+3=0$ alors $R_e\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=?$

Soit $x+iy$ *l'écriture algébrique de* z.

On a :

$$\begin{aligned} z^2-2\bar{z}+3=0 &\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+3+2iy(x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+3=0 \text{ et } y(x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2-y^2-2x+3=0 \text{ et } y=0\right) \text{ ou } \left(x^2-y^2-2x+3=0 \text{ et } x=-1\right) \\ &\Leftrightarrow \cancel{\left((x-1)^2=-2 \text{ et } y=0\right)} \text{ ou } \left(x=-1 \text{ et } y=\pm\sqrt{6}\right) \\ &\Leftrightarrow z=1\pm i\sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=-\frac{5}{7}\pm\frac{2\sqrt{6}}{7}i \text{ .(car } \{z_1,z_2\}=\{1-i\sqrt{6},1+i\sqrt{6}\}) \\ &\Rightarrow R_e\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=-\frac{5}{7} \end{aligned}$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{D}$.

Q19

$$\text{Si } z=\cos^2\theta+i\sin\theta\cos\theta \text{ alors } R_e\left(z^{-3}\right)=?$$

On a :

$$z^{-3}=\left(\cos\theta e^{i\theta}\right)^{-3}=\cos^{-3}\theta e^{i(-3\theta)}=\frac{\cos(3\theta)}{\cos^3\theta}-i\frac{\sin(3\theta)}{\cos^3\theta}\Rightarrow R_e\left(z^{-3}\right)=\frac{\cos(3\theta)}{\cos^3\theta}$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{C}$.

Q20

$$\text{Le nombre } \cos 5\theta=?$$

On a :

$$\cos 5\theta=R_e\left(e^{i(5\theta)}\right)=R_e\left((\cos\theta+i\sin\theta)^5\right)=R_e\left(\sum_{k=0}^{5}C_5^k(i\sin\theta)^k\cos^{5-k}\theta\right)$$

Comme $i^0=i^4=1$, $i^2=-1$ *d'une part et* $i^1=i^5=i$, $i^3=-i$ *d'autre part et comme* $C_5^0=1$, $C_5^2=10$ *et* $C_5^4=5$ *Alors*

$$\cos 5\theta=C_5^0\sin^0\theta\cos^5\theta-C_5^2\sin^2\theta\cos^3\theta+C_5^4\sin^4\theta\cos\theta=\cos^5\theta-10\sin^2\theta\cos^3\theta+5\sin^4\theta\cos\theta$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{D}$.

Toute remarque ou suggestion de votre part sera la bienvenue

Email : elabbassimed2014@gmail.com

End