

Dans ce fichier, j'ai essayé
de regrouper certaines astuces
ainsi que certains acquis qu'on
avait utilisés Lors de la correction
des concours de médecine
et de dentaire.

Pour plus d'astuces :
(bien détaillées et organisées)

Voir Fichier " Astuces
et compléments "

+ + + +

Bon courage

Remarques et astuces : (+ Rappel)

+ à ne pas oublier :

$$\sqrt[p]{a^m} \Rightarrow a^{\frac{m}{p}}$$

les suites

+ **Monotonie** → il suffit de comparer U_0 et U_1

+ **Suite divergente** $\begin{cases} \downarrow \rightarrow -\infty \\ \uparrow \rightarrow +\infty \end{cases}$

+ Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq q$ NC $0 < q < 1$

$$\frac{U_1}{U_0} < q$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{U_n}{U_0} \leq q^n$$

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} \leq q$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=0}^{\infty} U_k = 0$$

Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq q$ et $q > 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k = +\infty$$

+ Si $U_n = U_0 q^n$ Δ
Suite géo et $U_n = \frac{U_n - a}{U_n - b}$

+ $0 < q < 1$ ou $q > 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} U_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} U_k = +\infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k = a$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k = b$$

+ NB : parfois encadrement Δ lors du calcul limite

$$\Delta U_{n+1} = a U_n + b \quad (a \neq 1)$$

+ Suite affine

$$\text{et } U_n = U_n + x \rightarrow$$

$$\frac{b}{1-a} = x$$

donc U_n est une suite géo de raison $q = a$

+ **Suite géo**
 + si $q > 1$ → suite \uparrow NC $\lim \rightarrow +\infty$
 + si $0 < q < 1$ suite \downarrow $\lim \rightarrow 0$
 + si $-1 < q < 0$ + $n_i \uparrow$ $n_i \downarrow$ $\lim \rightarrow 0$

+ **Suite arithmétique**

si $r > 0$ - croissante $\lim \rightarrow +\infty$
 si $r < 0$ \downarrow $\lim \rightarrow -\infty$

2 qts Δ $\begin{cases} U_1 + \dots + U_n = \dots \\ 1 + \dots + n = \dots \end{cases}$
 déterminer U_n ou N

U_n suite géo : $U_n = U_0 q^n$
 et Somme de suite géo
 pt trouver l'indice n

Rappel SG : $U_n = U_p q^{n-p}$

Δ SA : $U_n = U_p + (n-p)r$

Si on a 2 termes : On peut déduire
Raison + Monotonie

(ex: suite géo : $\frac{U_1}{U_0}$ et SA : $U_1 - U_0$)

+ U_{n+1} en fct de U_n
 $\Rightarrow \lim U_n$: Résoudre $f(x) = x$

Nombre complexe

- + Si $\text{Re}(z) < \text{Im}(z) \Rightarrow \frac{\pi}{2}$ (Argument)
- $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) \Rightarrow \frac{3\pi}{4}$
- $\text{Re}(z) > \text{Im}(z) \Rightarrow \frac{\pi}{4}$
- Imaginaire pur $\Rightarrow \frac{\pi}{2}$

⚠️ Pr déterminer s'il s'agit du m angle ou non : (excl α et β)

il faut $\alpha - \beta = 2k\pi$

Exp: $\frac{25\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 4\pi$

\Rightarrow c'est le m angle.

θ	$-\theta$	$\pi + \theta$	$\pi - \theta$
cos	+	-	-
sin	-	-	+

+ triangle rectangle en A \Rightarrow on vérifie $AB^2 + AC^2 = BC^2$ sans rien calculer.

+ tableau d'horner

Expl: $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ (on vous donne par ex 2 comme solution)

Solution:

	1	2	0	-16
2	↓	2	8	16
X	1	4	8	0

(voir méthode en détail sur youtube) **Reste**

+ Résolution d'une équation:

Si les coefficients sont réels \Rightarrow solutions sont conjuguées entre eux.

$$+ \begin{cases} e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \\ e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x \end{cases}$$

⚠️ si vous calculez par ex pli $z = \frac{z_1^3}{z_2^4} \Rightarrow$ on utilise $e^{i\theta}$

Mais n'oubliez pas le module $|z| > 0$

⚠️ ⚠️ interprétation géo \neq ensemble des points

$|z-a| = r \Rightarrow AM = r$

$|z-a| = |z-b| \Rightarrow AM = MB$

⚠️ $\left| \frac{a+bi}{b-ai} = i \right| \left| \frac{a-bi}{b+ai} = -i \right|$

$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$

+ pt alignés droite (AB) distance de B(b)

+ Equation:

$y = ax + p$
 $VC \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$

+ cercle de diamètre [AB] privé de B

⚠️ $\text{Arg}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = k\pi$
 $\Leftrightarrow \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}^*$

$\frac{3a-3b}{3a-3c} = i$ Rectangle isocèle

$\frac{3a-3b}{3a-3c} = ki + 1, k \in \mathbb{R}$ Rectangle

$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ Equilatéral

translation: $z' - z = 3u$
 homothétie: $z' - w = k(z - w)$
 Rotation: $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

$|\bar{z} \dots| = |\overline{z \dots}|$ ⚠️ (pr ne déborder de base)

$|z - \dots| = \text{cte} \Rightarrow$ cercle
 $|z - \dots| = |z - \dots| \Rightarrow$ médiatrice.

2 nombres complexes symétriques
% à l'axe des abscisses
 $\Rightarrow z$ et \bar{z}

Formule de Moivre ¹⁾

$$(e^{i\theta})^m = \cos(m\theta) + \sin(m\theta)i$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(1-i)^2 = -2i$$

Les fonctions

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ fct rationnel}$$

+ Si: $\text{deg } P = \text{deg } Q + 1$ (degré du polynôme)

\Rightarrow Asymptote oblique (division euclidienne)

Si: $\text{deg } P = \text{deg } Q + n$ $n > 1$

\Rightarrow branche infinie de direction l'axe des ordonnées (OY)

Si $\text{deg } Q > \text{deg } P$ ou $\text{deg } P = \text{deg } Q$
 \Rightarrow asymptote horizontale

+ $f(x) = \ln(U(x))$

$f(x)$ a le m^{ême} signe que $U(x) - 1$ sur D_f (!)

Ex: $\ln(1 + e^{2x})$

$$1 + e^{2x} - 1 = e^{2x} > 0$$

$\Rightarrow f(x) > 0$

⚠ ⚠ Si on nous demande nombre de solution de $f(x) = 0$
 par ex: $f(x) = x^2 - 2 - 3 \ln(x) = 0$
 \Rightarrow On trace tab de variation (cette méthode c'est comme TVI)

Monotonie

+ Soit f' soit graphe

Si on: il suffit de comparer 2 images [ex: $f(2)$ et $f(-1)$]

Si on nous donne $g(x) = \dots$
 et parmi propositions:
 Signe + Monotonie + Nombre de solution
 \Rightarrow tab de variation

Si on nous donne graphe de:

f' d'après monotonie + on peut tirer signe de f' et donc indiquer son graphe.
 f'' + son graphe info sur f''
 + pt d'inflexion et concavité
 \Rightarrow Signe de f''

+ fct impaire et $0 \in D_f$
 \Rightarrow admet un pt d'inflexion au pt 0

⚠ $f(x) = \frac{aU(x) + b}{cU(x) + d}$
 $f'(x) = \frac{(ad - bc)U'(x)}{(cU(x) + d)^2}$

⚠ Asymptote g^{-1} $\left\{ \begin{array}{l} \text{horizontal} \rightarrow g \text{ verticale} \\ \text{verticale} \rightarrow g \text{ horiz} \\ \text{oblique} \rightarrow g \text{ oblique} \end{array} \right.$

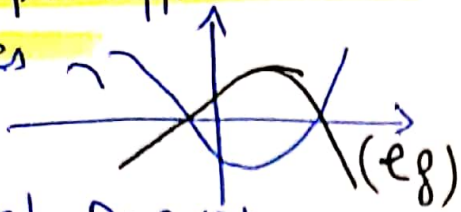
⚠ coeff directeur = $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

↑ puis
 1 carreau

+ fcts qst graphe (!)

$$1/ g(x) = -f(x)$$

\Rightarrow Symétrie par rapport à l'axe des abscisses



$$2/ g(x) = f(|x|) \quad D_f \cap \mathbb{R}^+$$

\Rightarrow Symétrie % à l'axe des ordonnées

$$3/ g(x) = f(x) + k$$

translation $k > 0$
 \Rightarrow en haut



$$4/ g(x) = f(x) + k < 0 \Rightarrow \text{en bas}$$

$$5/ g(x) = f(x + k) \quad \text{translation}$$

$k > 0$ à gauche $k < 0$ à droite

$$6/ |g(x)| = f(x)$$

Partie négative de $(g(x))$ cād au dessous de (Ox) devient (+)

$$(L(x))^{N(x)} = e^{N(x) \ln(L(x))}$$

⚠ $\int_{-a}^a |f(x)| dx$

Si fct paire $\int_{-a}^a f(x) = 2 \int_0^a f(x)$

\therefore fct impaire: $\int_{-a}^a f(x) = 0$

fct — paire \Rightarrow Symétrie par (Oy)
 — impaire \Rightarrow " " par O

⚠ Clarification :

Une fct définie en a pas forcément qu'elle soit dérivable en a .

Astuce 2 équation remarquables

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si $a+b+c=0$ $a+c=b$

donc: $\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{c}{a} \end{cases}$

Astuce limite

$\ln(1+x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$\frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow e^x \approx x + 1$

$\frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \approx x$

$\frac{\tan x}{x} = 1 \Rightarrow \tan x \approx x$

$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$

=> limite devient faisable en un clin d'œil

expl. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{10x} - e^{7x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+10x - 1-7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3$

Autre astuce Si $U(x) \rightarrow 0$

$$(1 + U(x))^d = 1 + d U(x)$$

$$(1 - U(x))^d = 1 - d U(x)$$

expl: $(2 + U(x))^d = 2^d (1 + \frac{U(x)}{2})^d$

$(1) \text{ NC } U(x) \rightarrow 0$ $= 2^d (1 + \frac{d}{2} U(x))$

lors du calcul de la limite

$$\lim_{+\infty} \frac{m^p}{(a^m)} \begin{cases} 0 ; a > 1 \\ +\infty ; 0 < a < 1 \end{cases}$$

$\text{NB } p > 0$

expl $U_m = m^2 (\frac{1}{2})^m$

$\ln(U_m) = 2 \ln(m) - m \ln(2)$

On trouve $\lim_{m \rightarrow \infty} \ln(U_m)$ d'abord

Les limites

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln(P(x))}{Q(x)} = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln(P(x))}{\ln(Q(x))} = \lim_{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$P \text{ et } q > 0 \lim_{+\infty} \frac{(\ln(x))^p}{x^q} = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{e^{P(x)}}{Q(x)} = \infty \text{ (NB l'infini de } Q(x))$$

expl: $\lim_{-\infty} \frac{e^{x^2+x+1}}{x^3+x-2} = -\infty$

$$\lim_{+\infty} Q(x) e^{P(x)} = 0$$

Règle de l'Hôpital

$$\frac{0}{0} \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_0 \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_0 \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_0 \frac{\sin(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a}{b}$$

NB: lors du calcul des limites:

- + À ne pas oublier:
- > Conjugé - Factorisation puis simplification ...
- ou changt de variable.
- ou Astuces: ln et e
- ou encadrement (suite/trigo) ...

$$\lim_{+\infty} \frac{\cos m}{m} = \lim_{+\infty} \frac{\sin m}{m} = 0$$

$$\lim_{0^+} x^q (\ln(x))^p = 0 \text{ (} q > 0, p > 0 \text{)}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{(\ln(x))^p}{x^q} = 0$$

équation diff

Calcul d'intégral

$$+ \int \tan x dx = -[\ln |\cos x|] \quad \text{!}$$
$$+ \int \ln x dx = [x \ln(x) - x]$$

NB: Pr vérifier si le calcul d'intégral est juste ou non:
 \Rightarrow On remarque le signe de la fonction.

(car si $f(x) > 0 \Rightarrow \int f(x) > 0$)
par ex: $\int \ln x$

on ne peut pas calculer l'intégral sur un interval] [

si on vous donne pas les bornes
 \Rightarrow c'est sur Df !

$\int | \quad | \Rightarrow$ pense à étudier le signe d'abord !

Astuce ds un ex:pl

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x + \sin x dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} x (\sin x)' + x' \sin x dx$$
$$= [x \sin x]_0^{\pi/2}$$

l'importance de $\tan^2 x = 1 + \tan^2 x$

ex:pl:

$$\int \tan^3 x dx = \int \tan^2 x \tan x dx$$
$$= \int (\tan x - 1) \tan x dx$$
$$= \int \tan^2 x - \tan x dx$$
$$= \left[\frac{\tan^2 x}{2} + \ln |\cos x| \right]$$

Proba

+ Répétition m, k
 $C_m^k (p)^k (1-p)^{m-k}$

⚠ l'univers ne change pas sauf
s'il s'agit d'une proba conditionnelle.

Permutation $m!$ ⚠

⚠ événement contraire
au moins une \Rightarrow n'obtenir aucune.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

⚠ à l'ordre lors du calcul
(parfois l'ordre est indiqué
parmis les données)

$$C_m^1 = m = A_m^1$$

$$C_m^m = 1 = C_m^0$$

$$A_m^m = m!$$

$$C_m^p = C_m^{m-p}$$

sans remise vs remise
coeff d'ordre ⚠

terme : exactement ⚠

$$\sum_{i=1}^m P_i = 1$$

$$E(X) = mp$$

$$V(X) = mp(1-p)$$

géo ds l'espace

+ Médiatrice d'un segment
ds le plan \Rightarrow droite

+ Médiatrice d'un segment
ds l'espace \Rightarrow plan