Université Mohammed V
ENS de Rabat 2016-2017

Concours d'entrée en 1 ère année de licence
d'enseignement de Mathématiques (LEM)
Epreuve d'Algèbre (Durée 1h30mn)

L'épreuve est composée de deux parties. Les questions de la partie I sont in

Partie I:

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation: $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que: $n = \overline{52}^x$ et $n = \overline{43}^y$. Déterminer x et y.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $\dfrac{n^7}{7} + \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$.

Partie II: On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unités $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $J^2 - 2J = 0_2$. En déduire que J est non inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.
2) On considère l'ensemble:

$$E = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -a \\ -a & a+b \end{pmatrix} : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

a) Montrer que $(E+, .)$ est un espace vectoriel réel.
b) Montrer que (I, J) est une famille génératrice de $(E, +, .)$ et déterminer $\dim E$.
c) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
d) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.
e) Est-ce-que $(E, +, \times)$ est un corps? justifier votre réponse.
f) Montrer que, pour tout $M_{(a,b)} \in E - \{0_2\}$, on a:

$$(M_{(a,b)} \text{ est un diviseur de zéro}) \iff b(2a+b) = 0$$

3) On considère l'anneau commutatif unitaire $(F, +, \times)$ tel que

$$M_{(a,b)} \in F \iff \left[M_{(a,b)} \in E \text{ et } (a = b = 0 \text{ ou } b(2a+b) \neq 0) \right]$$

a) Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif
b) Résoudre, dans F, l'équation:

$$X^2 + XJ - X = J$$

Université Mohammed V
ENS de Rabat

2016-2017

Concours d'entrée en 1 ère année de licence
d'enseignement des Mathématiques (LEM)
Epreuve d'Analyse (Durée 1h30mn)

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants.

Exercice 1: Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par:

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+2n+1}$$

Exercice 2: Soient f la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ par:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sin(x)$$

et la suite $(u_n)_n$ définie par:

$$u_0 \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \boxed{u_{n+1} = f(u_n)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que l'équation

$$\boxed{f(x) = x} \qquad f(\alpha) = \alpha$$

admet une solution unique α dans $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que:

$$\frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

c) Montrer que:

$$|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ pour tout } x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

En déduire que:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 3: Soit f une fonction numérique continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que

$$f(a)=f(b)=0 \text{ et } f'_d(a)=0.$$

Montrer qu'il existe $c\in\,]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(c)}{c-a}.$$

Exercice 4: Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose:

$$f(x)=\int_0^x te^{-t}dt.$$

a) Montrer que la fonction

$$x\longmapsto\frac{f(x)}{x}$$

est prolongeable par continuité en zéro.
b) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a:

$$\frac{x^2}{2}e^{\frac{-x-|x|}{2}}\leq f(x)\leq\frac{x^2}{2}e^{\frac{|x|-x}{2}}$$

c) En déduire

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{-x}-1+x}{x^2}$$

Exercice 5: Soit $(u_n)_n$ la suite définie par:

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

Déterminer sa limite.