Université Mohammed V
Ecole Normale Supérieure Rabat

Année 2014/2015

Filière: Licence Professionnelle d'enseignement de Mathématiques
Concours d'entrée en S1 (Durée 2 heures)

Exercice.

a) Déterminer l'ensemble des couples (x,y) des nombres entiers relatifs, solution de l'équation :

(E) : $8x - 5y = 3$

b) Soit m un entier relatif tel qu'il existe un couple (p,q) de nombres entiers vérifiant :

$m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$

Montrer que le couple (p,q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40)

c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000.

Problème.

Soient f_1 et f_2 deux fonctions réelles définies par :

$f_1(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $f_2(x) = 1 + \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}$

Partie A.

I) a) Calculer :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)$

b) Etudier les variations de f_1 en dressant son tableau de variations.

c) Etudier la position de la courbe C_1 de f_1 par rapport à la tangente à C_1 au point d'abscisse 0.

II) a) Etudier la parité de f_2.

b) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe C_2 de f_2 en $+\infty$.

c) Etudier les variations de f_2 en dressant son tableau de variations.

d) Etudier la position relative de C_1 et C_2.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = f_1(u_n)$ pour $n \geq 0$ $\left(f_1(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

I) Etudier la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans les cas suivants :

a) $u_0 = 0$

b) $u_0 = 1$

II) On suppose que $u_0 > 1$.

a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n > 1$.

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

c) Déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

III) On suppose que $0 < u_0 < 1$.

a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $0 < u_n < 1$.

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

c) Déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.